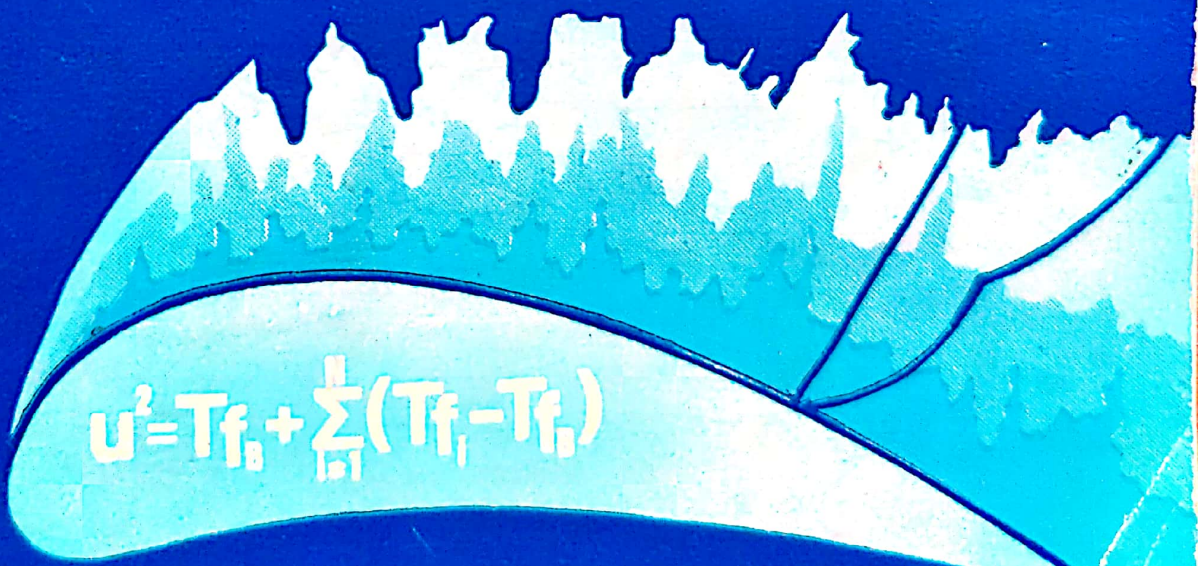
Săvulescu Șt.N.
Dumitrescu H.

A. Georgescu
M. Bucur

CERCETĂRI MATEMATICE ÎN TEORIA MODERNĂ A STRATULUI LIMITĂ



EDITURA ACADEMIEI
REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Scanned with OKEN Scanner

Șt. N. Săvulescu,
H. Dumitrescu

Adelina Georgescu
Maria Bucur

CERCETĂRI MATEMATICE ÎN TEORIA MODERNĂ A STRATULUI LIMITĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
BUCUREȘTI, 1981

Scanned with OKEN Scanner

Mathematical investigations into the modern theory of the boundary layer

Математические исследования в современной теории пограничного слоя

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA
R. 79717, BUCUREȘTI, CALEA VICTORIEI NR. 125.

Scanned with OKEN Scanner

PREFAȚĂ

Teoria stratului limită, inițiată de marele aerodinamician german Ludwig Prandtl (1875—1953), a cunoscut o mare dezvoltare cu începere din anul 1904 și numeroase lucrări i-au fost consacrate. Deși teoria simplifică ecuațiile lui Navier și Stokes, reținînd numai termenii care joacă un rol esențial în zona de frontieră a obstacolului solid, aflat în contact cu fluidul vîscos, așa-numitul strat limită, totuși problemele matematice pe care le pune ea sînt pe departe de a fi rezolvate.

Autorii, cunoscuți pentru activitatea lor științifică în domeniul mecanicii fluidelor și pentru pasiunea cu care-și desfășoară această activitate, își consacră monografia lor teoriei stratului limită, sub diferitele ei aspecte, insistînd asupra problemelor și metodelor matematice pe care le pune ea. În lucrare se prezintă o tratare riguroasă a problemelor matematice ale stratului limită, actualmente realizată doar în cele mai simple cazuri ca și problematica majoră a teoriei stratului limită pusă de practică și reflectată în abundentul material teoretic și experimental acumulat în cursul timpului în mod nesistematic în urma studierii a extrem de numeroase cazuri particulare. Dată fiind complexitatea problemelor teoriei stratului limită, această teorie cuprinde multe aproximații de natură fizică, care par să dea aparența separării ei de ecuațiile generale Navier-Stokes ale hidrodinamicii. De aceea, în capitolul I se arată modurile fundamentale de deducere a ecuațiilor stratului limită din ecuațiile lui Navier-Stokes și se analizează problema interacțiunii fluidului vîscos și nevîscos, adică a racordării soluțiilor stratului limită cu soluțiile ecuațiilor lui D'Alembert-Euler din zona adiacentă.

Transformările de coordonate joacă un rol esențial în teoria stratului limită, fiind legate de justificarea unor aproximații ulterioare. În cartea de față se utilizează o transformare de coordonate propusă de Șt. Săvulescu, ca și de C. Ferrari, care generalizează transformarea clasică a lui R. von Mises. Acestei transformări îi corespunde o formulare integro-diferențială a problemei, propusă de Șt. Săvulescu. Monografia se axează pe tratarea unitară a problemelor teoriei stratului limită cu ajutorul acestei metode, care oferă o bază rațională pentru dezvoltarea unor soluții analitice (ca primă aproximație) în toate regimurile de mișcare, laminar, tranzitoriu, turbulent, care determină direct caracteristicile mișcării.

Capitolul II este dedicat analizei calitative a ecuației lui Prandtl în stratul limită infinit, singurul caz în care există rezultate riguroase. Demonstrațiile folosesc transformarea lui von Mises și inecuații parabolice; mărginirile pe care le comportă ele se obțin cu ajutorul soluțiilor automodelate (similare) mult analizate în teoria clasică.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul stratului limită de grosime finită, transformarea lui Șt. Săvulescu conduce la introducerea unui operator neliniar cu proprietăți remarcabile; formularea integro-diferențială și utilizarea unui sistem de inecuații parabolice deschid un cîmp de studiu extrem de interesant pentru matematicieni ca și pentru hidrodinamicieni. Capitolul II analizează pe larg legătura dintre ecuația lui Pradtl, sistemul lui Navier-Stokes și sistemul lui D'Alembert-Euler, prin studiul comportării asimptotice a soluției ecuației lui Prandtl. Desprinderea stratului limită apare ca neexistență a unui anumit tip de soluții ale ecuației lui Prandtl.

În timp ce primele două capitole cuprind analiza în profunzime a ecuațiilor stratului limită, în capitolele III—VI se expun aspecte aplicative ale teoriei, pe baza formulării integro-diferențiale amintite mai sus. Astfel, cap. III prezintă ecuațiile de tip difuziv, în cazul în care difuzia importantă după o direcție este echilibrată de convecție, disipație și surse locale, studiul fiind făcut pe baza formulării integro-diferențiale care conduce considerarea unui operator integral neliniar Tf *cu proprietăți de contracție. Elementele introduse permit transformarea ecuației cu derivate parțiale originale, din planul fizic, într-o ecuație integro-diferențială din spațiul transformat, unde apar mai clar posibilități de analiză calitativă a soluției ei.*

Interpretarea noțiunii de medie și fluctuație pe baza formulării integro-diferențiale permite în cap. IV o discuție asupra determinismului și stocasticității soluțiilor în comparație cu teoriile moderne asupra fluctuațiilor din mișcările cu frecare.

Tot formularea integro-diferențială conduce la fundamentarea unor metode de aproximație pentru determinarea caracteristicilor stratului limită (frecare, transfer, efecte secundare etc.) precum și la deducerea unor relații de închidere pentru mișcările turbulente cu frecare (cap. V, VI). Se expune și o metodologie de prelucrare a datelor experimentale privitoare la cîmpul fluctuațiilor asociat unui profil de viteză medie.

Cîteva anexe, de interes matematic, dezvoltă elementele necesare expunerii. O ultimă anexă cuprinde date numerice privind distribuția fluctuațiilor în mișcările cu frecare și date experimentale prelucrate în cadrul formulării integro-diferențiale.

Lucrarea aduce elemente de deosebit interes teoretic și aplicativ privind teoria stratului limită. Ea umple un gol în literatura noastră de specialitate, unde, în afara monografiei marelui mecanician român Ștefan I. Gheorghiță (1926—1978), apărută în anul 1973, în cadrul Universității București, nu existau monografii consacrate acestui important capitol al științei mecanicii fluidelor. Matematicienii, mecanicienii, fizicienii, studenții facultăților de matematică-mecanică din universități și ai facultăților de profil hidro și aerodinamic din institutele politehnice vor fi cu deosebire interesați în lectura acestei cărți care aduce rezultate noi și pune probleme noi.

24 noiembrie 1979

Acad. CAIUS IACOB

Scanned with OKEN Scanner

CUPRINS

Introducere

CAP. I. MODELUL LUI PRANDTL AL STRATULUI LIMITĂ

§ 1.1. Limitări fizice ale mişcării potenţiale 13
§ 1.2. Ecuaţiile lui Prandtl 16
1.2.1. Deducerea ecuaţiilor lui Prandtl 16
1.2.2. Problema iniţială şi la limită pentru ecuaţiile lui Prandtl . . 21
1.2.3. Interacţiunea viscos-neviscos 25
1.2.4. Soluţii similare 27
§ 1.3. Forme echivalente ale ecuaţiilor lui Prandtl şi metodele de rezolvare a lor 34
1.3.1. Transformări de coordonate 34
1.3.2. Formularea integro-diferenţială a problemei matematice a mişcării fluidelor viscoase în stratul limită 39

CAP. II. ANALIZA CALITATIVĂ A ECUAŢIILOR LUI PRANDTL

§ 2.1. Existenţă şi unicitate. 42
2.1.1. Mişcări staţionare, plane, simetrice, Soluţii clasice 43
2.1.2. Mişcări staţionare, plane, cu profil $u_1 > 0$ la $x = 0$. Soluţii clasice 45
2.1.3. Mişcări staţionare, plane, cu profil $u_1 > 0$ la $x = 0$. Soluţii slabe 45
2.1.4. Mişcări nestaţionare, plane, simetrice cu $u_0 \equiv 0$. Soluţii aproape peste tot (a.p.t.) 46
2.1.5. Mişcări nestaţionare, axial-simetrice, cu $u_0 > 0$. Soluţii a.p.t. . 48
2.1.6. Mişcări plane, nestaţionare, cu $u_1 > 0$ 49
§ 2.2. Dezvoltări asimptotice (Rezistenţa la înaintare. Rolul profilelor concave şi al profilelor similare) 50
§ 2.3. Neexistenţa soluţiilor ecuaţiilor lui Prandtl. (Punctul de desprindere) 55
§ 2.4. Legătura dintre ecuaţiile Navier-Stokes şi ecuaţiile lui Prandtl . . . 57
§ 2.5. Stabilitatea soluţiilor 60
§ 2.6. Estimarea erorilor în teoria lui Prandtl a stratului limită 62

Scanned with OKEN Scanner

CAP. III. O FORMULARE INTEGRO-DIFERENȚIALĂ A UNOR ECUAȚII NELINIARE CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDIN DOI DE TIP DIFUZIV

§ 3.1. Extinderi ale modelului lui Prandtl 65
§ 3.2. Transformări de coordonate și ecuațiile transformate 72
§ 3.3. Formularea integro-diferențială 77
§ 3.4. Proprietățile operatorului integral 79
3.4.1. Punerea problemei 79
3.4.2. Proprietățile operatorului T 81
3.4.3. Clase de funcții tipic transformabile 93
§ 3.5. Problema de aproximații succesive 98

CAP. IV. TEORIA FLUCTUAȚIILOR ÎN CURGERILE CU FRECARE

§ 4.1. Modele fenomenologice și statistice ale fluctuațiilor în mecanica fluidelor 102
§ 4.2. Asupra naturii fizice a fluctuațiilor 108
§ 4.3. Statistica fluctuațiilor 112
§ 4.4. Descrierea Reynolds a cîmpului fluctuațiilor 121
§ 4.5. Descrierea cîmpului fluctuațiilor printr-o formulare integro-diferențială a ecuațiilor Navier-Stokes 127
§ 4.6. Descrierea distribuției fluctuațiilor asociate unui profil de viteze medii 133
§ 4.7. Modele ale dinamicii fluctuațiilor 140

CAP. V. DETERMINAREA CARACTERISTICILOR STRATULUI LIMITĂ CU AJUTORUL FORMULĂRII INTEGRO-DIFERENȚIALE

§ 5.1. Profilul de viteze 145
§ 5.2. Frontierele stratului limită 148
§ 5.3. Frecarea și desprinderea 152
§ 5.4. Transferul de căldură la perete 156
§ 5.5. Efecte slabe tridimensionale în stratul limită bidimensional 160
§ 5.6. Comparație între rezultatele obținute prin FID și prin alte metode . 163

CAP. VI. APLICAȚII ALE FORMULĂRII INTEGRO-DIFERENȚIALE EXEMPLE NUMERICE

§ 6.1. Considerații generale 167
§ 6.2. Efecte tridimensionale în tratarea ecuațiilor stratului limită . . . 169
§ 6.3. Efectul curburii asupra caracteristicilor stratului limită 176
§ 6.4. Efecte nestaționare în ecuațiile stratului limită 181
§ 6.5. Efecte de compresibilitate în stratul limită 185
§ 6.6. Distribuția tensorului tensiunilor Reynolds în curgerile cu frecare . . 191

ANEXE

Anexa 1. Principii de maximum. Teoreme de comparație 202
Anexa 2. Ecuațiile mișcării medii incompresibile cu fluctuații în coordonate ortogonale curbilinii 207

Scanned with OKEN Scanner

Anexa 3. Integrale uzuale 213
Anexa 4. Dezvoltări interioare şi exterioare 215
Anexa 5. Sisteme de coordonate ortogonale 216
Anexa 6. Distribuţia fluctuaţiilor în curgerile cu frecare. Date experimentale prelucrate prin FID 217

Bibliografie 235
Indice de materie 243
Abstact 245
Contents 248

Scanned with OKEN Scanner

INTRODUCERE

Progresele notabile înregistrate în ultimele decenii de tehnica experimentală, pe de o parte, și de teoria ecuațiilor diferențiale, pe de alta, au permis abordarea riguroasă și completă a problemei matematice a mișcării în stratul limită în cazul cel mai simplu corespunzător modelului lui Prandtl. Cartea de față prezintă o astfel de abordare sub forma unei analize fizice, matematice și experimentale a acestei mișcări, avînd ca punct de plecare modelul original al lui Prandtl.

Dezvoltarea tehnicii a extins, în mod natural, considerabil aria problemelor de tip strat limită, punînd un mare număr de noi probleme matematice și acumulîndu-se un uriaș material experimental. În volum se expune metoda formulării integro-diferențiale (FID) care tratează unitar toate aceste cazuri de tip strat limită și care prelucrează acest material experimental. În acest sens, această carte nu este un manual de strat limită și nici nu furnizează metode de calcul cu grad ridicat de precizie. Ea aduce în atenția specialiștilor în mecanica fluidelor reale un punct de vedere propriu de abordare unitară a curgerilor cu frecare cu fluctuații, punînd în același timp la dispoziția cititorului un bogat material experimental sintetizat.

Apreciem că pentru etapa actuală cunoașterea tensorului fluctuațiilor lui Reynolds este o condiție necesară și suficientă de aplicare a mecanicii fluidelor reale în tehnică. FID reprezintă un instrument util în cunoașterea acestui tensor prin elaborarea de programe experimentale, interpretare controlată a rezultatelor și deducerea de legi de material de utilizare practică. În același timp FID pune în evidență probleme matematice deschise legate de însăși natura curgerilor cu fluctuații. De aceea, prin această lucrare, facem un apel atît matematicienilor, pentru studierea acestor probleme, cît și experimentatorilor, pentru completarea datelor a căror lipsă a fost semnalată de noi (corelații ale fluctuațiilor de presiune, temperatură-viteză, densitate-viteză, concentrație-viteză).

Strîngerea în capitolul II a rezultatelor din teoria stratului limită, riguros deduse matematic, are dublu scop. Pe de o parte, ea permite o generalizare directă a teoremelor din teoria asimptotică a stratului limită a lui Prandtl la cazul teoriei după grosime finită. În acest ultim caz, în loc de o singură necunoscută vom avea două (noua necunoscută fiind grosimea stratului limită). Etapa ulterioară va trebui să ia în considerație probleme corespunzătoare unor configurații de curgere mai complicate. Pe de altă parte, această prezentare din capitolul II înlătură părerea greșită că în teoria stratului limită, care abundă în teorii formale, lipsesc tratări matematice riguroase.

Scanned with OKEN Scanner

Apariţia, mai puţin obişnuită în cărţile de metode matematice, a unor paragrafe consacrate prelucrării datelor experimentale este pe deplin justificată în condiţiile stratului limită. Într-adevăr, dimensiunile reduse ale stratului limită fac extrem de delicate măsurătorile directe şi reclamă o aparatură electronică fină. Interpretarea semnalelor furnizate de această aparatură cît şi cunoaşterea posibilităţilor acesteia sînt necesare teoreticianului care trebuie să ştie care sînt datele de care poate dispune. Avînd posibilitatea să interprezete singur aceste date, teoreticianul îşi poate formula ipoteze simplificatoare cu suport real.

Semnalăm, de asemenea, prezenţa unor teorii statistice alături de unele fenomenologice şi încercări de a le corela. După părerea noastră, un rezultat teoretic privind mişcarea fluidelor şi mai ales stabilirea limitelor de aplicabilitate a unui model matematic sau a altuia a acestei mişcări necesită o bună cunoaştere atît a aspectelor statistice (legate de cinetica moleculară, care furnizează legile şi constantele materiale) cît şi a ipotezelor continuumului pe care se sprijină ecuaţiile Navier-Stokes.

Planul general al cărţii este următorul. În capitolul I se expun motivaţii fizice ale introducerii modelului original al lui Prandtl pentru care se formulează complet problema matematică în diferite sisteme de coordonate, accentul punîndu-se pe transformările de tip Săvulescu. Capitolul II conţine analiza calitativă a ecuaţiilor lui Prandtl. În capitolul III formularea integro-diferenţială a lui Săvulescu (FID) este aplicată diferitelor extinderi ale modelului lui Prandtl. Proprietăţile unui operator integral care apare în FID sînt analizate; legat de aceasta se situează condiţiile în care este justificat un procedeu de aproximaţii succesive. Capitolul IV este dedicat problemei fluctuaţiilor în mişcările cu frecare, discutîndu-se aportul FID în descrierea lor. Formule analitice explicite pentru caracteristicile stratului limită sînt date, cu ajutorul FID, în capitolul V. În §5.6 se compară rezultatele numerice obţinute cu ajutorul FID cu cele obţinute prin alte metode pentru cazuri particulare de mişcări în stratul limită bidimensional laminar şi turbulent. Multe exemple de aplicaţii ale FID sînt date în capitolul VI. Acest ultim capitol se termină cu cîteva comentarii privind interpretarea datelor experimentale în stratul limită referitoare la tensorul tensiunilor al lui Reynolds. Anexa 1 conţine principii de maxim şi teoreme de comparaţie pe care se bazează demonstraţia teoremelor expuse în capitolul II. Un caz particular al formulelor din §4.4 este dat în Anexa 2; aceste formule sînt foarte utile în aplicaţii. Cîteva integrale ale unor funcţii legate de profilul de viteză transformat sînt date în Anexa 3. Anexa 4 prezintă succint metoda dezvoltărilor interioare şi exterioare iar Anexa 5, cîteva sisteme de coordonate ortogonale. Ultima, Anexa 6, este consacrată distribuţiei fluctuaţiilor în curgerile cu frecare şi datelor experimentale prelucrate prin FID.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL I

MODELUL LUI PRANDTL AL STRATULUI LIMITĂ

§ 1.1 Limitări fizice ale mișcării potențiale

În fluidele în mișcare, particulele fluide, ce stau la baza modelului de mediu continuu, sînt părți din fluid ale căror dimensiuni sînt astfel încît caracteristicile medii (pe volumul $\mathscr{V}$ al lor) ale mișcării satisfac anumite condiții de netezime adică funcțiile care le definesc și derivatele lor pînă la un anumit ordin sînt continue. Pentru subparticule aceste mărimi au salturi și variații bruște legate de numărul sensibil fluctuant de molecule din subparticule (vezi fig. 4.2.1). Deci caracteristicile medii nu reprezintă nici informații la nivel molecular nici la cel de mediu continuu. În deducerea ecuațiilor Navier-Stokes de mișcare a mediului continuu fluid, dimensiunea și distanța dintre particule nu intervine în nici un fel, deoarece nu s-a ținut seama de aceste lucruri în stabilirea corespondenței bijective dintre mulțimea particulelor și mulțimea punctelor spațiului euclidian R^3. În schimb, experimental, se poate determina dimensiunea particulelor care corespunde modelului continuu; această dimensiune se numește scară a mișcării fluide. Un model particular de mediu continuu fluid este cel potențial al fluidelor nevîscoase în care, în loc de ecuațiile Navier-Stokes, sînt folosite ecuațiile lui Euler. În acest mod particula fluidă trebuie, în plus, să aibă $\int_v \operatorname{rot} \vec{V}\, d\mathscr{V} = 0$. Modelul potențial există în *orice mișcare fluidă dar nu la orice scară*; acest lucru va fi analizat mai jos.

Modelele potențiale ale mișcării incompresibile staționare în jurul obstacolelor reprezintă soluții ale problemei la limită

$$\alpha \vec{V}_c + \beta \left(\frac{\partial \vec{V}_c}{\partial n} \right)_c = \vec{\Phi}_c, \quad \vec{V}_\infty = \vec{\Phi}_\infty$$

pentru ecuația lui Laplace $\Delta \vec{V} = 0$, unde $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ este viteza, $(x, y, z) \in D$ (domeniul de mișcare), C este frontiera lui D și are normala exterioară $\vec{n}$, indicele c arată valori pe conturul C, indicele ∞ arată valori la mari distanțe, iar α și β sînt constante. Cînd funcțiile $\vec{V}$, $\vec{V}_c$, $\vec{\Phi}_c$, $\vec{\Phi}_\infty$ și C sînt funcții regulate, ecuația eliptică de mai sus are soluție unică, determinată de aceste date. În cazul cînd aceste ecuații prezintă singularități, se pot construi soluții în domenii de regularitate izolînd vecinătăți ale singularităților. Soluția într-un punct descrie comportarea particulei centrată în acel punct și de dimensiune de ordinul $\delta < 10^{-1} L$, unde L

este dimensiunea corpului. Această soluție este valabilă fizic : 1) în orice domeniu, oricît de mic, dacă rot $\vec{V} = 0$ punctual ; 2) în domenii de volum $\mathscr{V}$ în care $\int_{\mathscr{V}} \text{rot}\, \vec{V}\, d\mathscr{V} = 0$; 3) în domeniul de dimensiune maximă în care $\vec{V}_\infty$ = constant. Dacă se coboară sub $\mathscr{V}_{\text{inferior}}$, avem $\int_{\mathscr{V}} \text{rot}\, \vec{V}\, d\mathscr{V} \neq 0$; pentru $\mathscr{V} \subset \mathscr{V}_{\text{inferior}}$ înseamnă că scara mișcării potențiale este dată de dimensiunea lui $\mathscr{V}_{\text{inferior}}$. Deci, cîtă vreme nu ne interesează comportarea locală și ne este suficientă caracterizarea globală $\int_{\mathscr{V}} \text{rot}\, \vec{V}\, d\mathscr{V} = 0$, soluția potențială este acceptabilă. Semnificația ei fizică încetează acolo unde dimensiunea d a particulelor nu este aceeași în tot cîmpul mișcării. De exemplu, în jurul unei aripi de avion, δ^* (grosimea de deplasare a stratului limită) este aproximativ de ordinul $10^{-2} \times$ coarda la bordul de atac, și de ordinul coardei la bordul de fugă după desprindere. Înțelegerea acestui fapt înlătură confuzia privind aplicarea modelului potențial unor mișcări turbulente sau laminare. Caracterul local al mișcării reflectat în rot $\vec{V} = 0$ sau rot $\vec{V} \neq 0$ nu influențează soluția potențială valabilă pentru $d(\mathscr{V})$ astfel încît $\int_{\mathscr{V}} \text{rot}\, \vec{V}\, d\mathscr{V} = 0$.

Soluția potențială a mișcării reprezintă un minim al energiei cinetice ceea ce explică tendința fluidelor ca la scară globală să corespundă acestei soluții. Prin optimizarea energiei la scară globală vom înțelege următorul lucru : Perturbațiile datorate prezenței corpului se transmit instantaneu în fluidul incompresibil sub forma variațiilor de presiune (insensibile la natura locală a curgerii) pentru particule cu dimensiuni apropiate de cele ale corpului. Or, transmiterea presiunii se realizează astfel încît mișcarea să aibă în ansamblu minimul energetic în prezența corpurilor perturbatoare pentru dimensiuni de volum de ordinul acestora.

Cînd scara mișcării este omogenă și mică în raport cu dimensiunea corpului (cu profil de viteze fără desprindere), curgerea potențială reprezintă o foarte bună aproximație pentru efectele de transmitere a presiunii datorate corpurilor. Cînd însă scara este neomogenă și variază de la ordinul de mărime sub cel al dimensiunii corpului pînă la dimensiunea corpului (profil de viteză cu desprindere), curgerea potențială trebuie considerată *zonal* și limitarea ei fizică este evidentă. Se recurge atunci la ecuații mai complete care să prindă comportamentul local al curgerii pînă la o scară inferioară limitei de valabilitate a curgerii potențiale. Un astfel de model calitativ și incomplet față de soluția ecuațiilor Navier-Stokes este modelul curgerii în stratul limită, exprimat prin ecuațiile de tip parabolic ale lui Prandtl, valabil într-o zonă îngustă de grosime δ de lîngă peretele solid. În interiorul acestei zone rot $\vec{V} = -\vec{k}\,(V_x - U_y) \neq 0$ iar $\frac{\delta}{x} \sim \frac{1}{\mathscr{R}e_x^m}$, $\mathscr{R}e = \frac{U(0)x}{\nu}$, $0 < m < 1$, unde x este coordonata în lungul peretelui, $U(0)$ este viteza în mișcarea potențială la perete iar ν este vîscozitatea cinematică. Cum prin această zonă presiunea se transmite fără modificări importante, rezultă că particula corespunzătoare, punctu-

Scanned with OKEN Scanner

lui matematic din curgerea potențială trebuie să fie mai mică decît L, dar mai mare decît δ, L fiind dimensiunea obstacolului perturbator. Spre ilustrare în figura 1.1.1 am reprezentat, pentru cazul cilindrului de rază a,

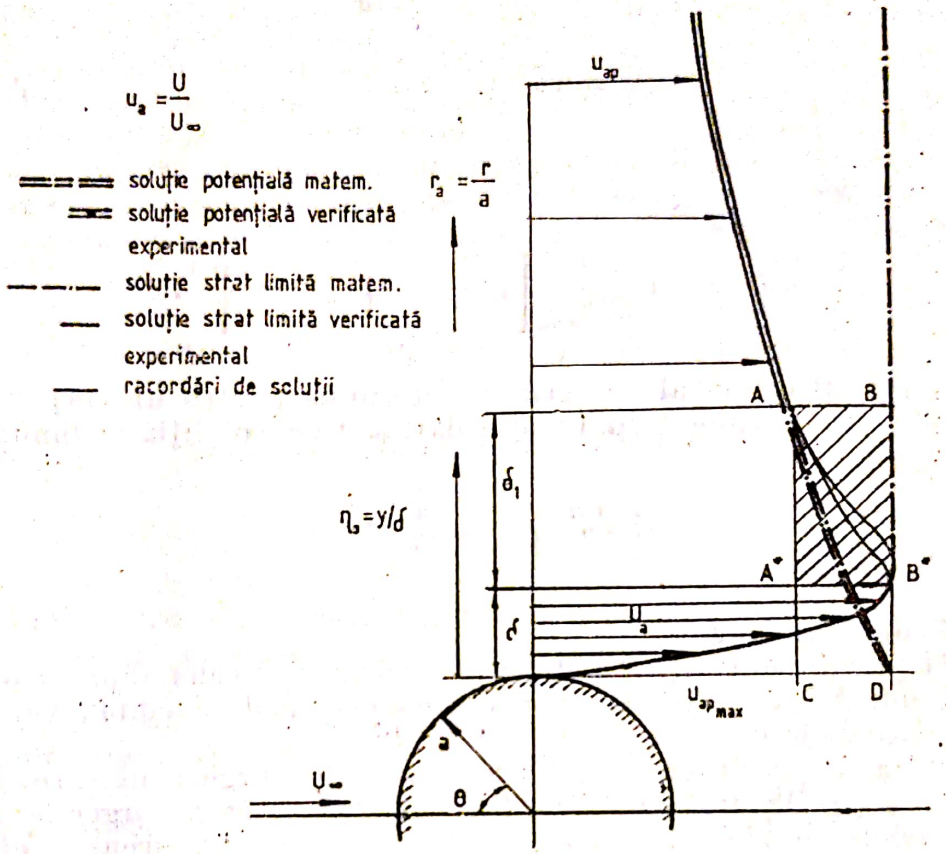


Fig. 1.1.1

profilul de viteze adimensionalizat $u_{ap} = \dfrac{U}{U_\infty}(r_a)$ din mișcarea potențială pentru $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, în funcție de distanța adimensionalizată $r_a = r\,a^{-1}$, iar $u_a = \dfrac{U}{U(0)}$ este viteza adimensională din stratul limită laminar în același punct $\left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right)$ în funcție de coordonata adimensională $\eta_0 = y/\delta$. În zona haşurată ABB^*DCA^*, soluția globală potențială și cea locală de strat limită au o infinitate de posibilități de racordare. În fond condiția de aderență la pereți, de care nu ține seama curgerea potențială, precum și condiția $U_y \gg V_x$, esențială pentru stratul limită, se manifestă cu precădere pentru $0 \leqslant y < \delta$, spre exteriorul stratului limită ($y \to \delta$) cele două tipuri de soluții nemaifiind atît de „conflictuale". O modalitate de „armonizare" a celor două soluții este sugerată de figura 1.1.1. Să considerăm $AA^* = \delta_1$ astfel încît $\dfrac{u_{ap_{max}} - u_{ap}(A)}{\delta_1} \approx \dfrac{u_{ap_{max}}}{\delta}$ ceea ce va asigura rot $\vec{V} \approx 0$ pentru o

particulă de dimensiune d, $\delta < d \leqslant \delta + \delta_1$. Dezvoltînd în serie

$$u_{ap}(\delta + \delta_1) = u_{ap\max} + (\delta + \delta_1)\, u_{apy}\Big|_{y=0} \quad \text{deci} \quad \frac{\delta + \delta_1}{\delta}\, u_{apy}\Big|_{y=0} +$$

$$+ \frac{u_{ap\max}}{\delta} = 0$$

ceea ce conduce la

$$\delta/\delta_1 = -u_{apy}\Big|_{y=0}\left[u_{apy}\Big|_{y=0} + \frac{u_{ap\,\max}}{\delta}\right]^{-1}.$$

Deci potențialul corect al curgerii se determină pentru un corp îngroșat cu stratul $\delta + \delta_1$ adăugat conturului dat, sau cu condiția la limită

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_{y=0} \sim \frac{u_{ap\,\max}}{\delta}$$

aplicată conturului dat.

Mai menționăm aspectul fizic al „coliziunii" celor două soluții pe partea frontală a unor corpuri neaerodinamice ca de exemplu vehiculele rutiere, vagoanele de tren și de metrou etc.

Notăm de asenenea următoarele zone de curgere în care soluția potențială și cea de strat limită nu pot reprezenta corect curgerea : zonele de desprindere, zonele punctelor de impact, zonele de recirculare etc.

§ 1.2 Ecuațiile lui Prandtl

1.2.1. Deducerea ecuațiilor lui Prandtl

1. *Metoda lui Prandtl* (Analiza ordinului de mărime al termenilor). În mișcările fluidelor puțin vîscoase (ν mic, $\mathcal{R}e$ mare) în jurul corpurilor, un model matematic simplificat al mișcării nu se obține neglijînd termenii în ν uniform în tot domeniul de mișcare așa cum ar părea indicat la prima vedere, ci doar în afara unui strat de lîngă peretele corpului numit strat limită, a cărui grosime δ este mult mai mică decît dimensiunea caracteristică a corpului. Acest lucru a fost formulat pentru prima dată de Prandtl [154] care a avansat ipoteza fundamentală potrivit căreia, deși coeficientul de vîscozitate cinematică ν este mic, totuși influența vîscozității este notabilă asupra mișcării, dar aceasta numai în stratul limită. Calcule numerice bazate pe soluții exacte simple ale ecuațiilor Navier-Stokes arată că într-adevăr pentru numere Reynolds $\mathcal{R}e$ mari, efectul vîscozității nu se simte la mari distanțe de corp unde mișcarea poate fi considerată ca satisfăcînd ecuațiile lui Euler (obținute pentru $\nu = 0$ din ecuațiile Navier-Stokes), ci doar în apropierea corpului (iar pentru configurații finite și în spatele corpurilor adică în dîră). De asemenea, Prandtl

face ipoteza că, în apropierea corpului, forțele viscoase au același ordin de mărime cu cele inerțiale. Pe baza acestor ipoteze, el deduce, din ecuațiile Navier-Stokes, ecuațiile simplificate ale stratului limită prin considerații asupra ordinului de mărime al diferiților termeni din ecuațiile Navier-Stokes. În fond $u \underset{y\to 0}{\sim} y$, $u \underset{y\to\delta}{\sim}$ const. și deci $(u_{yy})_{y\to 0} \sim 0$, astfel că raportul $u_t/\nu u_{yy}$ este determinant doar pentru $0 < y < \delta$.

Fie cazul cel mai simplu al mișcării plane, în absența forțelor masice, a unui fluid vîscos incompresibil în jurul unui corp de secțiune transversală alungită. Să presupunem că suprafața corpului este plană și axa Ox se întinde de-a lungul ei iar Oy este normală la ea. Ecuațiile Navier-Stokes bidimensionale și ecuația de continuitate care descriu această mișcare sînt [74]

$$u_t + uu_x + vu_y = -\rho^{-1}p_x + \nu(u_{xx} + u_{yy}),$$

$$v_t + uv_x + vv_y = -\rho^{-1}p_y + \nu(v_{xx} + v_{yy}), \tag{1.2.1}$$

$$u_x + v_y = 0,$$

unde indicele arată derivarea parțială în raport cu litera respectivă, (u, v) este viteza, p, presiunea, ρ, densitatea (constantă).

Pentru prescurtare, în loc să scriem: mărimea A este de același ordin de mărime cu mărimea B, vom scrie: $A \sim B$. Atunci, considerînd mărimile adimensionalizate cu ajutorul lungimii caracteristice l și a vitezei U luată la frontiera exterioară a stratului limită $y = \delta$, și notînd $\mathcal{R}e = Ul/\nu$, avem, după ipoteza fundamentală a lui Prandtl,

$$x \sim 1,\ y \sim \delta,\ v = \frac{dy}{dt} \sim \delta,\ v_x \sim \delta,\ v_y = \delta/\delta = 1,\ v_x \sim \delta,\ v_t \sim \delta,$$

$$v_{xx} \sim \delta,\ v_{yy} \sim \delta^{-1},\ u_t \sim 1,\ u_x \sim 1,\ u_y \sim \delta^{-1},\ u_{xx} \sim 1,\ u_{yy} \sim \delta^{-2}$$

iar după cealaltă ipoteză privind raportul forțelor de inerție și a celor vîscoase rezultă $\nu \sim \delta^2$, de unde rezultă $1/\mathcal{R}e \sim \delta^2$ deci $\delta \sim \mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}}$. Neglijînd în (1.2.1) termenii de ordinul lui δ în prima ecuație și pe cei de ordinul întîi în cea de a doua și ținînd seama că

$$p_x \sim 1,\ p_y \sim \delta^{-1},$$

din (1.2.1) obținem, în coordonate adimensionale [196],

$$\begin{cases} u_t + uu_x + vu_y = -p_x + \mathcal{R}e^{-1}u_{yy}, \\ 0 = p_y, \\ u_x + v_y = 0, \end{cases} \tag{1.2.2}$$

primele două ecuații (1.2.2) fiind cunoscute sub numele de ecuațiile lui Prandtl. De multe ori, dat fiind că se admite tacit că $p_y = 0$, în loc de ecuațiile lui Prandtl ne vom referi numai la ecuația $(1.2.2)_1$ a lui Prandtl.

Să observăm că deși $v \sim \delta$, totuși v, $u_y \sim 1$ căci $u_y \sim \delta^{-1}$; această din urmă estimare exprimă viteza mare de creștere a lui u de la $u = 0$ la peretele $y = 0$ la valoarea $u = 1$ la frontiera exterioară a stratului limită $y = \delta$.

Avînd, în (1.2.2), doar două ecuații pentru trei necunoscute u, v, p, va trebui ca p să fie prescris. Cum în stratul limită $p_y = 0$ înseamnă că presiunea la peretele $y = 0$ se transmite integral la $y = \delta$. Atunci este natural să alegem drept $p(x, t)$ presiunea de pe perete din mișcarea potențială, deci de pe o linie de curent în care, conform ecuației lui Bernoulli,

$$U_t + UU_x = -\rho^{-1}p_x,$$

$U(x, t)$ fiind componenta după Ox a vitezei din mișcarea potențială la peretele $y = 0$. De aceea o formă echivalentă cu (1.2.2) este

$$u_t + uu_x + vu_y = U_t + UU_x + \mathcal{R}e^{-1}u_{yy}. \tag{1.2.2}'$$

Să rezumăm condițiile în care sînt valabile ecuațiile lui Prandtl:

1) $\mathcal{R}e$ mare;

2) δ mult mai mică decît lungimea caracteristică a corpului (de exemplu grosimea sa) și anume $\delta \sim \mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}}$;

3) $p_y = 0$ (mai exact $p_y \ll p_x$);

4) $u_{xx} \ll u_{yy}$;

5) $v \ll u$,

ultimele trei condiții fiind valabile în stratul limită.

Ecuațiile Navier-Stokes și ecuațiile lui Euler reprezintă egalitatea a două impulsuri deci a doi vectori indiferent de sistemul de coordonate în care le scriem. Prin suprimarea unor termeni care definesc forțele vîscoase, ecuația lui Prandtl nu mai are această proprietate, ea depinzînd în mod esențial de sistemul de coordonate ales. Acest lucru este extrem de important mai ales în scrierea ecuației $(1.2.2)_2$; constanța presiunii nu este valabilă decît în direcția normalei la suprafața corpului, în alte sisteme de coordonate ea va fi transformată corespunzător. În particular, această dificultate va fi întîlnită la scrierea ecuațiilor stratului limită tridimensional în coordonate curbilinii.

Să remarcăm că din modul de deducere a ecuațiilor lui Prandtl ne așteptăm ca soluția lor să constituie o bună aproximație pentru u dar nu și pentru v. De asemenea, ecuațiile lui Prandtl sînt cvasiliniare de tip parabolic. În cazul staționar, u se poate scrie $u_x = (\mathcal{R}e\, u)^{-1}u_{yy} + \ldots$, formă asemănătoare cu ecuația căldurii, cu deosebirea că factorul $(\mathrm{Re}\, u)^{-1}$ nu este constant.

2. *Metoda perturbației.* (Dezvoltări interioare și exterioare). Ecuațiile lui Prandtl sînt ecuații asimptotice ale ecuațiilor Navier-Stokes cînd $\nu \to 0$; în §2.4 se va arăta că soluția sub formă de serie formală (1.2.3) (în care ne oprim doar la primul termen) reprezintă dezvoltarea asimptotică a soluției ecuațiilor Navier-Stokes pentru $\nu \to 0$.

Ecuațiile (1.2.2) își păstrează forma și atunci cînd peretele solid este curb, de curbură $K(x)$, așa cum vom presupune mai jos. Deoarece $\mathcal{R}e$ este

presupus mare, $\mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}} = \varepsilon$ este un parametru mic iar ecuațiile Navier-Stokes conțin acest parametru pe lîngă derivatele de ordin cel mai mare. Ecuațiile lui Euler obținute pentru $\varepsilon = 0$ sînt de un ordin mai mic, cu alte cuvinte avem de-a face cu o problemă de perturbații singulare. Să punem $\varepsilon\eta = y$ (deci să dilatăm intervalul de lîngă perete), $v = \omega\varepsilon$, și să ținem seama că $\mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}} = \varepsilon$. Introducînd acestea în ecuațiile (1.2.1), neglijînd apoi termenii în ε^2 în $(1.2.1)_1$ și pe cei în ε^2, ε^3, ε^4 în $(1.2.1)_2$ și revenind la variabilele y și v, obținem tocmai ecuațiile lui Prandtl. Aceasta era de așteptat deoarece alegerile $y = \varepsilon\eta$, $v = \omega\varepsilon$, $\mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}} = \varepsilon$ exprimă cele două ipoteze ale lui Prandtl.

La perete, fluidul vîscos aderă ($u = v = 0$), pe cînd cel nevîscos alunecă ($v = 0$), deci prin trecerea de la ecuațiile Navier-Stokes la ecuațiile lui Euler se pierde o condiție la limită. De aceea soluția formală sub formă de serie în ε trebuie să sufere o schimbare rapidă la traversarea unui strat subțire de lîngă perete. Acesta este tocmai stratul limită al lui Prandtl [46]. Pentru a studia soluția ecuațiilor Navier-Stokes lîngă perete, introducem ca mai sus variabila $\eta = y\varepsilon^{-1}$ și scriem pentru u, v, p serii asimptotice interioare (locale)

$$(1.2.3)\quad u = u_0(x, \eta) + \varepsilon u_1(x, \eta) + \ldots, \; v = \varepsilon v_0(x, \eta) + \varepsilon^2 v_1(x, \eta) + \ldots,$$

$$p = p_0(x) + \varepsilon p_1(x, \eta) + \ldots,$$

care introduse în (1.2.1) dau în prima aproximație, ca mai sus, ecuațiile (1.2.2). În ele curbura nu apare, pe cînd în aproximațiile următoare, care conduc la ecuațiile de ordin superior ale stratului limită, curbura apare

$$(1.2.4)\quad \begin{cases} u_0 u_{1x} + v_0 u_{1y} + u_1 u_{0x} + v_1 u_{0y} = \\ = -p_{1x} + K\{y(u_0 u_{0x} + p_{0x}) + u_{0y} - u_0 v_0\}, \\ p_{1y} = K u^2_0, \\ u_{1x} + v_{1y} = K(v_0 y)_y. \end{cases}$$

Ecuațiile lui Prandtl, ca și ecuațiile Navier-Stokes, sînt neliniare, pe cînd ecuațiile de ordin superior ale stratului limită sînt liniare ceea ce are drept consecință faptul că efectul diferitelor influențe se adună fiind valabil principiul superpoziției. Cazul considerat de noi este cel mai simplu ; pentru cazul altor efecte adiționale (compresibilitate, vorticitatea curentului exterior etc.) trimitem la [216].

Să considerăm acum dezvoltarea exterioară a aceleași soluții ale ecuațiilor Navier-Stokes dar în coordonatele (x, y) ; avem

$$(1.2.3)'\qquad u = U(x, y) + \varepsilon U_1(x, y) + \ldots,$$

$$v = V(x, y) + \varepsilon V_1(x, y) + \ldots, \; p = P(x, y) + \varepsilon P_1(x, y) + \ldots.$$

Deci prima aproximație în dezvoltarea (1.2.3)′ este soluția (U, V, P) a ecuațiilor lui Euler ale mișcării fluidelor neviscoase, pe cînd prima aproximație în dezvoltarea (1.2.3) este soluția (u_0, v_0, p_0) a ecuațiilor lui Prandtl. Pentru viscozități, tinzînd la zero ($\varepsilon \to 0$), $\eta = \frac{y}{\varepsilon}$ tinde la infinit pentru valori finite ale lui y, deci pentru y chiar foarte aproape de zero. Să egalăm (match), în virtutea acestei observații, soluția (u, v, p) dată de (1.2.3) pentru $\eta \to \infty$ cu cea dată de (1.2.3)′ în punctele $y = 0$. Prin efectuarea acestei egalări obținem, în primă aproximație, condițiile la mari distanțe pentru soluțiile ecuației lui Prandtl în funcție de soluțiile ecuațiilor lui Euler la perete și anume

$$\lim_{\eta\to\infty} u_0(x, \eta) = U(x, 0) = U(x), \quad \lim_{\eta\to\infty} v_0(x, \eta) = V(x, 0) = 0,$$

$$\lim_{\eta\to\infty} p_0(x, \eta) = P(x, 0) = p(x).$$

O motivație fizică a acestei racordări și legat de ea a comportării lui $u_0(x, y)$ la $y \to \infty$ este dată în [58], [62] în legătură cu unicitatea soluțiilor similare de tip Falkner-Skan, unde pe această bază se postulează : $u_0 \leqslant U$, $u_0 \to U$ pentru $\eta \to \infty$ cît mai repede cu putință. În multe studii însă, în loc de aceasta (§2.1), se impune condiția $\lim_{y\to\infty} u_0(x, y) = U(x)$. La perete impunem condițiile $u_0(x, 0) = v_0(x, 0) = 0$.

În cele de mai sus am văzut că, în baza unui principiu de egalare, viteza la mari distanțe în stratul limită, deci în modelul de primă aproximație al lui Prandtl, se egala cu cea din modelul lui Euler luată la perete. Deci condițiile la perete în modelul lui Prandtl sînt aceleași cu cele din modelul lui Navier-Stokes, dar condițiile la mari distanțe diferă. În schimb ecuațiile lui Euler trebuie rezolvate în aceleași condiții la infinit ca și cele din modelul lui Navier-Stokes, dar nu și la perete. Această situație sugerează ideea că există o regiune de suprapunere (overlaping) a domeniilor de valabilitate a celor două serii. Metoda suprapunerii bazată pe această idee constă în determinarea a două serii, una Taylor pentru η mici și alta asimptotică pentru η mari, prin egalarea valorii lor și a unora dintre derivatele lor într-un punct din domeniul comun de valabilitate.

În general, cele două metode folosite în teoria asimptotică nu sînt echivalente ; pentru legătura dintre ele trimitem la [38], unde este tratată in extenso și problema racordării dezvoltărilor asimptotice și cea a perturbațiilor singulare. Aici să mai recomandăm doar legătura dintre principiul de egalare și existența limitei soluțiilor în x și ε față de aceea în ansamblul variabilelor x, ε.

Soluțiile asimptotice au un caracter formal pînă în momentul cînd se demonstrează riguros că diferența (într-o anumită normă) dintre ele și soluția exactă tinde la zero odată cu parametrul mic al problemei. În capitolul II vom arăta că în cazul stratului limită fizic acest lucru s-a demonstrat pentru situația fizică cea mai simplă.

De obicei, în dezvoltarea interioară se consideră primii doi termeni ai seriei, adică soluția sistemului lui Prandtl și a sistemului (1.2.4) de a doua aproximație. Pentru ca această a doua aproximație să fie complet

Scanned with OKEN Scanner

definită, trebuie specificate și condițiile la limită. Astfel, principiul de egalare dă pentru soluția sistemului (1.2.4) următoarele condiții la limită

$$\left.\begin{aligned} &u_1(x, 0) = v_1(x, 0) = 0, \\ &V_1(x, 0) = v_0(\eta) + \eta\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}\right)_{\eta=0}, \\ &u_1(x, \eta) \approx U_1(x, 0) - K\eta\, U_0(x, 0), \\ &p_1(x, \eta) \approx P_1(x, 0) + K\eta[U_0(x, 0)]^2 \end{aligned}\right\} \text{la } \eta \to \infty,$$

Metodele asimptotice descrise mai sus sînt în momentul de față singurele riguroase în teoria stratului limită.

1.2.2. Problema inițială și la limită pentru ecuațiile lui Prandtl

Mult timp după deducerea lor, ecuațiile lui Prandtl au făcut obiectul unor studii cu caracter aplicativ, dată fiind importanța mare a teoriei stratului limită pentru aplicațiile practice. Cum prin construcție aceste ecuații erau valabile doar pentru $y \in [0, \delta]$, funcțiile $u(t, x, y)$, $v(t, x, y)$ și $p(t, x)$ trebuie definite pentru $t \in [0, T]$, $x \in [0, X]$, $y \in [0, \delta]$, introducîndu-se astfel o nouă necunoscută $\delta(t, x)$. Impunem soluției (u, v) a ecuațiilor (1.2.2) să verifice *condiția inițială*

$$u(0, x, y) = u_0(x, y), \ (x, y) \in [0, X] \times [0, \delta] \tag{1.2.5}$$

și următoarele *condiții la limită*

$$u(t, 0, y) = u_1(t, y), \ (t, y) \in [0, T] \times [0, \delta], \tag{1.2.6}$$

$$u(t, x, 0) = u_2(t, x), \ v(t, x, 0) = v_2(t, x), \ (t, x) \in [0, T] \times [0, X] \tag{1.2.7}$$

$$u(t, x, \delta) = U(t, x). \tag{1.2.8}$$

Uneori la $y = \delta$ cerem o racordare mai bună decît cea a vitezelor din stratul limită și din mișcarea exterioară potențială dată de (1.2.8); de exemplu, impunem ca la $y = \delta$, viteza din stratul limită să aibă un punct staționar

$$u_y(t, x, \delta) = 0. \tag{1.2.9}$$

Se întîlnesc de asemenea și alte condiții la $y = \delta$. Funcția $\delta(t, x)$ definită pe $[0, T] \times [0, X]$ satisface condiția inițială

$$\delta(0, x) = \delta_0(x), \ x \in [0, X], \tag{1.2.10}$$

$$\delta(t, 0) = \delta_1(t), \ t \in [0, T]. \tag{1.2.11}$$

Scanned with OKEN Scanner

Dat fiind caracterul neliniar al ecuațiilor lui Prandtl și deoarece soluția lor depinde de δ, condiția (1.2.8) constituie o ecuație operatorială pentru δ care însă conține și valori ale lui u și v la $y = \delta$, deci, de fapt, u, v, δ satisfac un sistem de ecuații operatoriale care trebuie rezolvate în condițiile de mai sus și în care nu se decuplează ecuația pentru δ. În practică δ se determină nu din (1.2.8), ci din condiția ca la $y = \delta$, viteza în stratul limită să difere de $U(t, x)$ cu 1%.

Datele problemei de valori inițiale și la limită pentru ecuațiile lui Prandtl sînt deci: $\mathcal{R}e$; $U(t, x)$; T; X; viteza inițială $u_0(x, y)$; viteza în secțiunea inițială $u_1(t, y)$ numită viteză inițială în problemele staționare; (u_2, v_2) viteza de injecție prin peretele $y = 0$; δ_0 și δ_1.

Dintre toate condițiile de mai sus o discuție reclamă condiția (1.2.8) deoarece natural ar fi ca în locul vitezei potențiale la perete $U(t, x)$ în (1.2.8) să avem viteza potențială la $y = \delta$, racordarea vitezelor din cele două regiuni adiacente în $y = \delta$ să se facă corespunzător valorilor lor la $y = \delta$. (Desigur aceasta ar atrage o complicație mare a calculelor.) Motivația pentru care putem totuși folosi (1.2.8) este următoarea:

Soluția potențială este valabilă în punctele unei rețele al cărei pas este de ordinul lui δ. La o scară superioară mișcarea este irotațională iar mediul continuu trebuie considerat ca fiind format din aceste particule. În interiorul lor se pot găsi „subparticule" cu o dimensiune cel puțin de un ordin de mărime mai mic pentru care mișcarea este rotațională și este guvernată de ecuațiile Navier-Stokes. Mergînd mai departe, ajungem la structura moleculară în care microparticulele ascultă de ecuațiile mecanicei statistice (de exemplu, de ecuația lui Boltzmann). Interacțiunea dintre particule și subparticule nu este supărătoare la mari distanțe de corp (de ordinul de mărime al dimensiunii corpului). Însă în imediata lui vecinătate, din cauza proprietății de aderență a corpului la particulele fluide (viteza strict zero la perete a „subparticulei"), viteza și presiunea particulelor sînt constante și sînt date de soluția potențială. În schimb, subparticulele corespunzătoare au un comportament dinamic foarte diferit: cele de lîngă perete au viteza zero, iar cele mai depărtate au viteze foarte apropiate de viteza din mișcarea potențială. Deci în interiorul particulelor există o distribuție de viteze pe care soluția n-o sesizează. Spre deosebire de viteză, presiunea n-are variații așa mari, fiind aproximativ aceeași pentru toate subparticulele. Distribuția de viteze din interiorul particulei din apropierea peretelui se supune ecuațiilor stratului limită. Mărginindu-ne la aceste particule din apropierea peretelui, ele avînd aceeași viteză, această viteză reprezintă condiția la $y = \delta$ (sau $y \to \infty$) pentru viteza subparticulelor din stratul limită. Deci racordarea la $y = \delta$ (sau $y \to \infty$) a soluției ecuațiilor stratului limită cu aceea a ecuației Bernoulli luată la $y = 0$ este o contradicție care trebuie înțeleasă astfel: soluția din stratul limită atinge foarte repede ($y = \delta$) pe cea potențială, deci racordarea (1.2.8) sau la $y \to \infty$ nu-i afectează valabilitatea în interiorul stratului limită.

Teoria în care condiția (1.2.8) se impune la frontiera exterioară a stratului limită se numește teoria după grosime finită a stratului limită și ea este analizată în studiile inginerești; teoria în care (1.2.8) se înlocuiește cu condiția $\lim_{y\to\infty} u = U$ se numește teoria asimptotică a stratului limită. Rezultatele riguroase obținute cu teoria din urmă vor fi expuse în capitolul II. Deosebirea fundamentală dintre cele două teorii constă

în aceea că în teoria după grosime finită avem o problemă cu frontieră liberă (adică cu frontiera *a priori* necunoscută) care este mult mai greu de abordat decît problema la limită obișnuită a teoriei asimptotice ; drept rezultat, în mare parte, în cel mai simplu caz, studiul riguros matematic al problemei la limită a teoriei asimptotice este deja făcut (vezi cap. II) în timp ce în cealaltă teorie practic nu există nici un astfel de studiu.

Formularea integro-diferențială inițiată de Săvulescu și folosită extensiv în această carte reduce problema cu frontieră liberă într-o necunoscută la un sistem de ecuații integro-diferențiale cu două funcții necunoscute. În acest mod este deschisă, și în teoria după grosime finită, a stratului limită, calea unei abordări riguroase analitice.

Vom considera doar *soluții clasice* pentru problema (1.2.2), (1.2.5)—(1.2.11), adică acele soluții (u, v, δ) în care u, v, δ posedă toate derivatele parțiale care apar în (1.2.2), continue pe intervalele închise $[0, T]$, $[0, X]$, $[0, \delta]$.

Datorită netezimii pînă la frontieră a soluției, trebuie să aibă loc condiții de *compatibilitate* între diferitele condiții la limită sau, eventual, între condițiile la limită și ecuațiile (1.2.2). De exemplu

$$u_0(0, y) = u_1(0, y), \; u_0(x, 0) = u_2(0, x) \text{ etc.}$$

În cazul staționar, funcțiile din (1.2.2) nu depind explicit de timpul t astfel că $u_t = 0$, iar condiția (1.2.5) nu mai este necesară.

Cerința de netezime pe intervale închise a soluției duce la valabilitatea sistemului (1.2.2) nu numai în interiorul acestor intervale, ci și pe frontiera lor, ceea ce are drept rezultat posibilitatea deducerii unor noi condiții la limită chiar din sistemul (1.2.2). Impunînd soluției să fie suficient de netedă pentru ca să putem deriva (1.2.2) în sens clasic, atunci obținem încă alte condiții la limită. Toate aceste noi condiții la limită furnizează informații *a priori* asupra comportării soluției, de un interes deosebit fiind aliura profilului la $y = 0$ și δ. Astfel, în cazul staționar, $(1.2.2)_1$ dă indicații asupra concavității profilului la perete (de exemplu : la $y = 0$ avem $u_{yy} = \mathcal{R}ep_x$, deci pentru gradienți favorabili de presiune profilul are concavitatea în jos iar pentru gradienți adverși, în sus. Alte proprietăți ale soluției la perete se pot stabili *a priori* prin derivarea lui $(1.2.2)_1$ în raport cu y și ținînd seama de ecuația de continuitate în ecuația obținută. Se găsește că $u_{yyy} = 0$ la $y = 0$. Prin diferențieri succesive ale lui $(1.2.2)_1$ și ținîndu-se seama de $(1.2.2)_3$, se deduc și alte relații *aprioric* la $y = 0$. Dintre acestea menționăm doar $(0{,}5\,(u_y)^2)_x = \nu u_{yyyy}$; după cum u_{yyyy} este nulă sau nu, desprinderea stratului limită este regulată sau are o singularitate.

Datorită parabolicității ecuațiilor lui Prandtl, pentru $u > 0$ influența datelor din secțiunea inițială $x = 0$ scade repede (§2.2) la mari distanțe în aval, profilele de viteză ale stratului limită tinzînd către soluții similare. Dat fiind caracterul parabolic al ecuațiilor lui Prandtl, influența datelor la $x = 0$ nu se simte în amonte decît în condițiile existenței unui curent de întoarcere și a unei zone de amestec, care însă nu vor fi considerate în această carte. În orice caz să remarcăm că data problemei la $x = 0$ aduce cu ea în soluție pentru $x > 0$ istoria procesului curgerii pentru $x < 0$, de aceea problemele în care $u_1 \neq 0$ se numesc probleme de continuare a stratului limită. Condițiile la $y = 0$ și $y = \delta$ nu țin seama decît de influența prezenței peretelui și a curentului exterior.

Scanned with OKEN Scanner

Caracteristicile stratului limită ce vor fi deduse din problema (1.2.2) (1.2.5)—(1.2.11) sînt:

1. Grosimea δ a stratului limită, de cele mai multe ori este definită prin relația $1 - \frac{u(\delta)}{U} \approx 0{,}01$. De asemenea, se întîlnește definiția după care δ verifică relația $\int_0^\delta \left(\frac{u}{U} - \frac{y}{\delta}\right) dy = \int_\delta^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$ ceea ce revine la alegerea lui δ astfel încît profilul de viteze să determine anumite două arii egale; în sfîrșit, o a treia definiție este cea conform căreia δ reprezintă lungimea segmentului din planul $\left(y, \frac{u}{U}\right)$ pe dreapta $\frac{u}{U} = 1$, segment situat între axa $y = 0$ și tangenta în origine la profilul $\frac{u}{U} = \frac{u(y)}{U}$. Pentru o reprezentare geometrică a se vedea [57], [100]. Oricare ar fi definiția sa, δ depinde în general de t, x și ν. Pentru placa plană cînd $U = U_\infty$, Blasius a obținut că $\delta \approx 5\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$.

2. Grosimea de deplasare δ^* definită prin $\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$ și care este aproximativ egală cu deplasarea $\int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{U}\right)$ a liniei de curent din stratul limită față de cea din curentul nevîscos, măsurată într-un punct de cotă egală cu grosimea stratului limită, este o grosime condiționată a stratului limită; în cazul stratului limită pe placa plană, Blasius a găsit că $\delta^* \approx 1{,}73\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$, de unde rezultă că $\delta \approx 3\delta^*$, relație foarte mult folosită în studiile aplicative. Pentru alte interpretări fizice vezi [100]. δ^* intervine în problema interacțiunii vîscos-nevîscos.

3. Grosimea pierderii de impuls $\delta^{**} = \int_0^\infty \frac{u}{U}\left(1 - \frac{u}{U}\right) dy$; la placa plană ea este $\delta^{**} = 0{,}664\sqrt{\frac{\nu x}{U_\infty}}$. Așadar δ^{**} este strîns legată de rezistența la înaintare.

4. Rezistența la înaintare este forța de frecare pe toată suprafața corpului $W = \int_0^X \tau_0 \, dx$, unde $\tau_0 = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}$ este tensiunea tangențială la perete iar μ vîscozitatea dinamică. X este deobicei punct de desprindere dacă desprinderea are loc pe corp sau „punctul" de tranziție de la mișcarea laminară la cea turbulentă dacă apare tranziția. Pentru $x > X$, τ_0 trebuie luat din mișcarea turbulentă.

5. *Punctul de desprindere.* Fluidul vîscos are proprietatea de a adera la perete. Cu toate acestea, în anumite condiții, în unele zone ale mișcării el se desprinde (separă) de corp formînd o regiune separată (de recirculare) care este inaccesibilă curgerii vîscoase ce vine de la infinit amonte. Regiunea separată și regiunea curgerii care vine de la infinit amonte sînt mulțimi de puncte care satisfac axioma continuității a lui Dedekind și care definesc o suprafață de separare continuă între ele. În cazul bidimensional, aceasta este o linie care începe în punctul $(x_s, 0)$ de pe corp, numit

Scanned with OKEN Scanner

punct de separaţie sau de desprindere şi este definit de una din următoarele condiţii [40];

a) eforturile tangenţiale la perete se anulează pentru $x = x_s$;

b) începe curgerea în sens invers faţă de curgerea principală;

c) $u_y(x_s, 0) = 0$.

De cele mai multe ori drept definiţie a lui x_s se ia c); desprinderea avînd loc cînd $U_x < 0$ şi deci în curentul exterior, gradientul de presiune este advers ($p_x > 0$). În general, în punctul de separare ecuaţiile lui Prandtl au o singularitate aşa după cum arată calculele numerice şi dezvoltările asimptotice [14], soluţia ne mai putînd fi prelungită dincolo de x_s. În $x = x_s$ soluţia ecuaţiilor lui Prandtl încetează să mai fie unică, ramificîndu-se. Pentru $x > x_s$ ecuaţiile stratului limită nu mai sînt valabile. În cazul tridimensional nici una dintre condiţiile a)-c) nu defineşte desprinderea. Pentru o discuţie asupra separării tridimensionale trimitem la [40], unde poate fi găsită de asemenea discuţia asupra punctelor de ramificare (legate de separare) pentru a căror existenţă o condiţie necesară este anularea la perete a derivatei după normală a componentei tangenţiale la suprafaţă după x şi z a vitezei.

Semnalăm de asemenea faptul că în mişcările turbulente, b) şi c) în general nu sînt bune. Singura definiţie a desprinderii rămîne cea dată la început (a)).

Separarea în stratul limită laminar staţionar diferă [217] de cea din cazul nestaţionar [120] cînd desprinderea poate fi undeva în interiorul mişcării unde se anulează atît viteza cît şi frecarea iar regiunea de separaţie începe ca o bulă [118].

O privire completă asupra separării este dată de [14]; pentru studiul separării stratului limită recomandăm [27], [28].

1.2.3. Interacţiunea vîscos-nevîscos

În condiţiile de valabilitate ale ecuaţiilor lui Prandtl, interacţiunea vîscos-nevîscos se reduce la acţiunea curentului exterior asupra stratului limită, curentul exterior constituind condiţia la limită dată pentru ecuaţiile stratului limită. Curentul exterior dat, modelat de soluţia ecuaţiilor lui Euler, este independent de prezenţa stratului limită la perete, avînd viteza tangenţială $U(x)$, componenta sa normală fiind nulă [74]. Racordarea profilului de viteză $u(x, y)$ la exteriorul stratului limită cu U (potenţial) se face, în teoria asimptotică a stratului limită, prin $u \to U$ pentru $y \to \infty$, iar în teoria după lungime finită, prin $u(x, \delta) = U(x)$, $u_y(x, \delta) = q_e(x)$ (dat), de obicei $q_e = 0$. În acest prim model fizic de interacţiune, presiunea potenţială de la perete se transmite integral prin stratul limită, iar curentul exterior nu simte deloc prezenţa stratului limită. La modelele matematice de ordin superior ale stratului limită, interacţiunea se manifestă atît prin racordarea la frontiera stratului limită, cît şi prin includerea în ecuaţiile din stratul vîscos a ecuaţiei a doua a impulsului sub formă mai complicată decît $\frac{dp}{dy} = 0$ [117], [219].

Prin interacţiune vîscos-nevîscos vom înţelege atît acţiunea curentului exterior asupra stratului limită, cît şi efectul acestuia asupra curen-

Scanned with OKEN Scanner

tului exterior, pe care modelul lui Prandtl nu-l ia în considerație. Să menționăm cîteva rațiuni fizice ale acestei interacțiuni :

a) Soluțiile stratului limită conțin și componenta normală la perete, v, care la exteriorul stratului limită, are valoarea $v(x, \delta)$ nenulă, dar foarte mică, de exemplu, de ordinul lui $\mathscr{R}e^{-\frac{1}{2}}$ (în mișcarea laminară), care se neglijează, conform modelului lui Prandtl. Totuși, prezența lui v modifică mișcarea potențială din cauză că mișcarea potențială (de tip eliptic) este determinată de condițiile la limită și o mică modificare a acestora duce la modificări importante ale acestei mișcări.

b) Există zone (spre desprindere) în care stratul limită se îngroașă pînă la grosimi comparabile cu cele locale ale corpului. În această situație, modelul lui Prandtl, care presupune δ mic, nu mai funcționează și nici curgerea potențială nu mai poate fi calculată, ținînd seama numai de forma corpului solid.

c) Importanța interacțiunii vîscos-nevîscos se manifestă de asemenea cu pregnanță în epoca actuală a zborurilor cosmice, deoarece la reintrarea în atmosfera terestră a vehiculelor spațiale, caracteristici ale mișcării vîscoase subsonice din stratul limită din imediata vecinătate a corpului interacționează cu cele ale mișcării nevîscoase supersonice, hipersonice sau în gaze rarefiate din exteriorul său [101]. Fenomenul complex al interacțiunii strat limită-undă de șoc poate fi schematizat astfel : undele de presiune din curentul supersonic modifică presiunea din curentul subsonic din amonte [49], ceea ce determină modificarea curburii liniilor de curent din subsonic și ca urmare a celor din regiunea supersonică adiacentă etc. Ecuațiile lui Prandtl nu mai modelează bine mișcarea din acest strat limită căci $\mathscr{R}e$ este acum mic, grosimea stratului este mare (datorită aportului de presiune), iar presiunea nu mai este constantă în stratul limită [219].

Observațiile de mai sus au condus la metode de evaluare a efectului stratului limită asupra soluției potențiale care urmează a fi determinată. Printre acestea notăm :

1) Modificarea formei corpului cu grosimea de deplasare δ^* determinată din teoria stratului limită a lui Prandtl în care curentul exterior U era condiționat numai de corp.

2) Înlocuirea corpului printr-un sistem de singularități, surse și vîrtejuri, cu intensități calculate cu ajutorul lui $v(x, \delta)$ dat de modelul lui Prandtl [35], [18]. Modalitățile 1), 2) sînt prim pas într-un proces iterativ care pentru aplicații practice s-a redus doar la prima iterație, convergența procesului rămînînd o problemă deschisă.

3) Înlocuirea modelului lui Prandtl cu modele de ordin superior date de sistemul (1.2.4); stadiul acestei probleme poate fi urmărit în [60]. Un mod de luare în considerație a interacțiunii vîscos-nevîscos este dat de metoda sintetică a lui Seth [202], care introduce o forță exterioară de constrîngere ce depinde de un parametru n și care se anulează pentru n mari, cînd vitezele iau valori irotaționale, cu excepția punctelor din stratul limită. Acesta-i permite o evaluare a raportului dintre forțele vîscoase și cele de inerție în funcție de n dedus din cerința ca pentru n mari, forța de constrîngere să se anuleze. Grosimea stratului limită se determină din condiția ca în afara stratului vorticitatea să se anuleze.

4) Datorită complexității interacțiunii strat limită-undă de șoc, stratul limită este împărțit în mai multe zone caracterizate de cîte un tip

de mișcare modelat de ecuațiile Euler sau Prandtl și racordate la frontiere. Din punct de vedere matematic, prezența interacțiunii strat limită-undă de șoc modifică caracterul ecuațiilor (de exemplu, caracterul hiperbolic al ecuațiilor pentru curentul compresibil supersonic capătă anumite trăsături eliptice) ceea ce implică modificarea tehnicilor standard de calcul [79], [23], [98], [102], [103], [60]. Menționăm că aceste calcule sînt îngreunate și de prezența unei regiuni transonice [31].

5) Aceasta face ca din ce în ce mai mult interacțiunea vîscos-nevîscos să se trateze prin rezolvarea numerică a ecuațiilor Navier-Stokes compresibile [104], [214], [105], [220], [207], în tot domeniul de mișcare. Dacă șocul este moderat de puternic, stratul limită se desprinde și apare o zonă de recirculare. Acest fenomen nu are loc dacă intensitatea șocului este mică [206], [94], [4], [227], [47]. În cazul corpurilor rotunjite la capăt, interacțiunea vîscos-nevîscos se manifestă prin modificarea profilelor din stratul limită datorită gradienților mari de entropie creați de aceste corpuri la numere Mach mari [42], [208].

Metodele de luare în considerație a interacțiunii vîscos-nevîscos prezentate mai sus și care se bazează pe ecuațiile lui Prandtl sînt deci valabile în regim laminar. Ele însă pot fi extinse la cazurile tranzițional și turbulent prin extinderea ecuației lui Prandtl la ecuația

$$(1.2.2)'' \qquad \rho(u_t + uu_x + vu_y) = -p_x + \tau_y,\ p_x =$$

$$= -\rho(UU_x + U_t),\ u_x + v_y = 0,\ p_y = 0;$$

prima ecuație devine prima ecuație a lui Prandtl $(1.2.2)_1$ dacă $\tau = \mu u_y$. În tranziție sau turbulență conceptul de strat limită își păstrează actualitatea (grosimea mică a stratului menținîndu-se) dar acum frecarea τ are o expresie mai complicată, funcție de corelațiile de ordin doi. Pe această bază, după alegerea lui τ, [12], deosebim următoarele modele semiempirice [19]: model de turbulență de tip vîscozitate turbulentă (de tip Boussinesq, între care o formă recentă a fost dată de Săvulescu [180]), de tip lungime de amestec (de tip Prandtl și Taylor), modele de turbulență cu o ecuație atașată de transport (de tip Kolmogorov-Prandtl), cu mai multe ecuații atașate (Spalding, Saffman, Hanjalic și Launder) etc. Toate sistemele formale de ecuații implicate de modelele citate reprezintă modalități de închidere a ecuațiilor lui Reynolds utilizate extensiv și tradițional pentru reprezentarea mișcărilor tranziționale și turbulente.

Remarcăm, de asemenea, și utilizarea soluțiilor „turbulente" (în sens generalizat) ale ecuațiilor Navier-Stokes, precum și metoda de integrare directă a lui Kraichnan aplicată de Leslie la mișcările cu frecare, încă nevalorificate practic [97].

1.2.4. Soluții similare

Așa, după cum sugerează și numele, este numită soluție similară a stratului limită o soluție particulară a ecuațiilor lui Prandtl care are proprietatea că profilul de viteze corespunzător ei dintr-o secțiune a stratului limită este geometric asemenea (similar) cu cel din orice altă secțiune, deci pentru orice x profilele de viteze pot fi reduse la o singură curbă printr-o alegere convenabilă a factorului de scară pentru y și u. O condiție

Scanned with OKEN Scanner

necesară ca o soluție să fie similară este să existe o relație care transformă ecuațiile cu derivate parțiale ale stratului limită în ecuații diferențiale ordinare. Datorită marelui avantaj al soluțiilor similare, de a fi determinate dintr-o ecuație diferențială ordinară, metoda soluțiilor similare este printre cele mai des folosite în teoria stratului limită. Deoarece deducerea lor se găsește aproape în orice tratat de strat limită, aici ne vom mărgini la a menționa cîteva principii pe care se bazează demonstrația existenței și a unicității lor. Domeniul de existență, exprimat în funcție de diferiții parametri fizici care le caracterizează, este pe larg cercetat în ampla bibliografie citată.

Citām trei condiții necesare de similitudine care se exprimă prin cerința ca profilul de viteză din mișcarea exterioară stratului limită să aibă o anumită formă:

1) $U = u_1 x^{m_1}$ (această viteză corespunde mișcării nevîscoase în vecinătatea vîrfului unei pene de unghi $\pi\beta$, unde $\beta = 2m_1(1 + m_1)^{-1}$, u_1 și m_1 fiind constante [18]. Cazul $\beta = 0$ corespunde plăcii plane în curent uniform iar $\beta = 1$, punctului de stagnare);

2) $U = u_1 x^{-1}$ (care corespunde unei surse);

3) $U = u_1 e^{u_2 x}$ (corespunzătoare mișcărilor în canale cu pereți curbi, u_1, u_2 fiind constante).

Dacă pereții sînt impermeabili, făcînd schimbarea, în primul caz, $\eta = y\sqrt{(1 + m_1)U(2\nu x)^{-1}}$ și exprimînd funcția de curent ψ cu ajutorul unei noi funcții necunoscute $f(\eta)$ astfel încît $\psi(x, y) = \sqrt{2\nu u_1(1 + m_1)^{-1}}\, x^{(m_1+1)0,5} f(\eta)$, din (1.2.2)′ obținem așa-numita ecuație a lui Falkner-Skan [41], [229], [112], [25], [75], [61], [76],[77],[106], [58], [198].

$$f''' + f''f + \beta(1 - f'^2) = 0,$$

care trebuie rezolvată în condițiile $f(0) = f'(0) = 0$, $\lim_{\eta\to\infty} f'(\eta) = 1$; prim, secund etc. indică derivări în raport cu η. Pentru $\beta = 0$ ecuația lui Falkner-Skan devine ecuația lui Blasius [229], [9]:

$$f''' + f''f = 0,$$

la care se adaugă aceleași condiții la limită. Pentru mișcări mai complicate, soluțiile similare satisfac alte probleme bilocale, de exemplu: problema lui Stewartson a mișcării unui fluid compresibil pe o suprafață fixă [112], [205], [69]

$$f''' + ff'' + \beta(h - f'^2) = 0,\ h'' + fh' = 0,\ f(0) = f'(0) = 0,$$

$$h(0) = a,\ \lim_{\eta\to\infty} f' = \lim_{\eta\to\infty} h = 1;$$

problema lui Pohlhausen care apare în convecția naturală a unui fluid vîscos adiacent unui perete vertical încălzit [112], [64]

$$f''' + ff'' + \frac{2}{3}(h - f'^2) = 0,\ h'' + fh'\sigma = 0,\ f(0) = f'(0) = 0,\ h(0) = 1,$$

$$\lim_{\eta\to\infty} f' = \lim_{\eta\to\infty} h = 1$$

Scanned with OKEN Scanner

problema mișcării lui Kármán generată de rotația unui disc [111], [198], [64]

$$f''' + ff'' + \beta(g^2 - \omega^2 + \sigma^2 - f'^2) = 0,\ h'' + fh' - 2bf'h = 0,$$

$$f(0) = f_0,\ f'(0) = f'_0,$$

$$h(0) = h_0,\ \lim_{\eta\to\infty} f' = \sigma,\ \lim_{\eta\to\infty} h = \omega;$$

și problema mișcării unui fluid incompresibil într-un strat limită tridimensional lîngă un punct de stagnare [71], [70], [63], [30]

$$f''' + f''(f + ch) + (1 - f'^2) = 0,\ h''' + h''(f + ch) + c(1 - h'^2) = 0,$$

$$f(0) = f'(0) = h(0) = h'(0) = 0,\ \lim_{\eta\to\infty} f' = \lim_{\eta\to\infty} h' = 1,$$

unde f și h sînt funcțiile necunoscute, celelalte litere sînt constante fizice date. Pentru alte probleme de acest tip trimitem la [51], [52], [50] (pentru cazul tridimensional al corpurilor în rotație) [201], [1], [56], [99], [65] (pentru cazul compresibil) etc.

În cele ce urmează schițăm cîteva rezultate privind existența și unicitatea soluțiilor acestor probleme bilocale. Demonstrarea existenței se bazează pe teoreme de punct fix (Leray-Schauder, Tihonov, Banach) (principiul contracției) etc. a căror aplicabilitate este condiționată de anumite mărginiri asupra soluțiilor și derivatelor lor, pe rezultate de topologia spațiului condițiilor inițiale [63] etc.

Teoremele de punct fix au fost aplicate, de unii autori, direct sistemelor diferențiale [229], [25], [75], [61], [64], [65], iar de alții, unor sisteme echivalente de ecuații integrale [83], [63], [111], [226]; în sfîrșit, în unele lucrări problema bilocală a fost mai întîi transformată într-o problemă Cauchy, prin introducerea unor date arbitrare (parametri) în punctul zero, pentru care problemă avem teoreme de existență, urmînd ca apoi să se demonstreze că acești parametri pot fi astfel aleși încît să fie satisfăcute și condițiile la infinit [112], [69]. În demonstrarea unicității se folosesc fie metode elementare, pe baza proprietăților asimptotice ale soluțiilor, fie principii de maxim, fie monotonia termenilor de ordin inferior din ecuații, fie condiția de tip Lipschitz pentru aceștia etc.

Dintre demonstrațiile privind existența soluțiilor sistemelor de mai sus am ales, spre ilustrare, pe aceea a lui Lan [91] care poate fi adaptată mai multora dintre aceste sisteme. Lan dă o teoremă de existență pentru un tip de ecuații funcționale diferențiale, pe care o demonstrează cu ajutorul unui rezultat al lui Hartman [61] (care reprezintă o extindere a unei cunoscute leme a lui Nagumo) care permite aplicarea principiului de punct fix al lui Tihonov. Restul demonstrației existenței soluțiilor sistemelor de mai sus constă în dovedirea faptului că aceste sisteme sînt de tipul celor din teoremă. În acest fel el aplică teorema la problemele lui Pohlhausen, Stewartson, Kármán și Howarth. Să notăm deci: $\mathbb{R}_0^+ = \{t : 0 \leqslant t < \infty\}$, $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1 = \{t : -\infty < t < \infty\}$, $R > 0$ este un număr fixat, C este spațiul funcțiilor continue reale definite pe $\mathbb{R}_0^+$ cu topologia convergenței uniforme pe subspații compacte ale lui $\mathbb{R}_0^+$; pentru $0 \leqslant a \leqslant R$, fie mulțimea

Scanned with OKEN Scanner

$H = H(a, R) = \{x \in C \mid x(0) = a,\ 0 \leqslant x(t) \leqslant R$ pentru $t \geqslant 0\}$. Dacă $u, v \in \mathbb{R}^1$, fie $E(R) = \{(t, u, v) \mid t \geqslant 0,\ 0 \leqslant u \leqslant R,\ v \in \mathbb{R}^1\}$ iar pentru $T > 0$ să notăm $E_T(R) = \{(t, u, v) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant u \leqslant R,\ v \in \mathbb{R}^1\}$. Spunem că funcția continuă și pozitivă $\Phi(s)$, $s \geqslant 0$, este funcție Nagumo dacă $\int_0^\infty s\, ds/\Phi(s) = \infty$. În sfirșit, fie $M = M(R, T, \Phi)$ o constantă astfel încît $\int_{R/T}^{M} s\, ds/\Phi(s) \geqslant R$.

TEOREMĂ. (Lan). *Fie $X(t, u, v, z)$ o funcție continuă cu valori reale pe $E(R) \times \mathbb{R}^j$ și F o transformare continuă de la H la $C^j = \underbrace{C \times \ldots \times C}_{\text{de } j \text{ ori}}$.*

Să presupunem $X(t, R, 0, z(t)) \geqslant 0$ și $X(t, 0, 0, z(t)) \leqslant 0$ pentru $t \geqslant 0$ și pentru toți $z(t) \in F[H]$. Să presupunem, de asemenea, că pentru orice $T > 0$, există o funcție Nagumo $\Phi_T(s)$, astfel încît $|X(t, u, z(t))| \leqslant \Phi_T(|v|)$ pentru $0 \leqslant t \leqslant T$, $0 \leqslant u \leqslant R$ și $v \in \mathbb{R}^1$, $z(t) \in F[H]$. Să presupunem că, pentru orice $z(t) \in F[H]$ fixat, ecuația diferențială

$$(*) \qquad y'' = X(t, y, y', z(t)),\ y \in H$$

are cel mult o soluție $y(t)$. Atunci ecuația funcțională diferențială $x'' = X(t, x, x', z(t))$, $z \in F[x]$, are cel puțin o soluție $x = x(t) \in H$.

LEMĂ. (Hartman). *Fie $Y(t, u, v)$ o funcție continuă cu valori reale pe $E(R)$, astfel încît $Y(t, R, 0) \geqslant 0$ și $Y(t, 0, 0) \leqslant 0$; să presupunem, de asemenea, că pentru orice $T > 0$, există o funcție Nagumo $\Phi_T(s)$, $s \geqslant 0$, astfel ca $|Y(t, u, v)| \leqslant \Phi_T(|v|)$ pe $E_T(R)$. Atunci, pentru orice a din $0 \leqslant a \leqslant R$, problema de valori inițiale*

$$y'' = Y(t, y, y'),\quad y \in H$$

are cel puțin o soluție $y = y(t)$; în particular

$$(**) \qquad 0 \leqslant y(t) \leqslant R \text{ pentru } t \geqslant 0,$$

și

$$(***) \qquad |y'(t)| \leqslant M(R, T, \Phi_T) \text{ pentru } 0 \leqslant t \leqslant T,\ \forall\, T > 0.$$

Definim operatorul $T : H \to H$ astfel: Fie $x \in H$ și $z \in F[x]$. Atunci, după lema lui Hartman, ecuația $(*)$ are o soluție $y \in H$ care prin ipoteză este unică. Să punem $y = T[x]$; cum $(**)$ și $(***)$ au loc, după teorema lui Ascoli-Arzela, rezultă că domeniul $\mathcal{R}(T)$ al valorilor lui T este o mulțime precompactă a lui H. Se poate demonstra că T este și continuă, deci $\mathcal{R}(T)$ este compact ceea ce permite aplicarea teoremei de punct fix a lui Tihonov și teorema lui Lan este demonstrată.

Menționăm, în încheiere, că teorema de existență a lui Hartman aplicată problemei lui Kármán se bazează în mod esențial pe un rezultat al lui Corduneanu [26].

Soluțiile similare sînt doar unele dintre soluțiile posibile ale problemei (1.2.2)', importanța lor deosebită în teoria stratului limită fiind aceea că

ele dau comportarea asimptotică la infinit aval a tuturor soluțiilor stratului limită (dintr-o anumită clasă) (§ 2.2).

Soluția lui Blasius. Prima deducere a unei soluții similare a fost făcută în 1908 de către Blasius, care a rezolvat ecuația care-i poartă numele folosind o metodă ulterior aplicată în toate problemele de soluții similare. Astfel, lîngă perete, soluția se scrie ca serie Taylor convergentă pentru $0 \leqslant \eta \leqslant \eta^*$, iar la mari distanțe, $\eta > \eta^{**}$ ($\eta^{**} < \eta^*$), ca serie asimptotică ai căror coeficienți vor fi determinați atît cu ajutorul ecuației și a condițiilor, cît și din racordarea celor două serii într-un punct η' din domeniul lor comun de valabilitate ($\eta' \in [\eta^{**}, \eta^*]$).

În loc de variabilele η și f din secțiunea precedentă, să luăm $\eta_1 = \sqrt{2}\eta$ și $f_1 = \sqrt{2} f$; atunci ecuația lui Blasius și condițiile la $\eta = 0$ și ∞, renunțînd la indicele 1, se scriu [9]

$$2 f''' + f'' f = 0\,, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad \lim_{\eta \to \infty} f' = 1.$$

Presupunînd că $f \in C^\infty [0, \eta^*]$, putem scrie $f(\eta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)\, \eta^n$, unde am ținut seama de condițiile $f(0) = f'(0) = 0$. Dată fiind netezimea lui f, ecuația lui Blasius se poate deriva ori de cîte ori dorim. În ecuațiile obținute introducem pentru f seria de mai sus și găsim că singurii coeficienți nenuli sînt $\varphi^{(3j+2)}(0) = \left(-\frac{1}{2}\right) c_j a^{j+1}$, $(j = 0, 1, 2, \ldots)$, unde am notat $\varphi''(0) = a$; $c_0 = 1$ iar c_j, $(j = 1, 2, \ldots)$, se determină din următoarea formulă de recurență $c_j = \sum_{r=0}^{j-1} C_{3j-1}^{3r}\, c_{j-r-1} c_r$.

Fie ε un parametru mic astfel că pentru η mari, f admite dezvoltarea asimptotică

$$f = f_1 + \varepsilon f_2 + \varepsilon^2 f_3 + \ldots$$

în care drept primă aproximație este mișcarea potențială $f_1 = \eta - b$ (b este o constantă); introducînd această dezvoltare în ecuația lui Blasius și egalînd coeficienții aceleași puteri ale lui ε, obținem pentru f_2 ecuația $(\eta - b) f_2'' + 2 f_2''' = 0$ a cărei soluție este $f_2 = \gamma \int_\infty^\eta d\eta' \int_\infty^{\eta'} e^{-\frac{1}{4}(\eta'' - b)^2}\, d\eta''$ (γ, constantă); se vede că sînt satisfăcute condițiile $\lim_{\eta \to \infty} f_1' = 1$ și $\lim_{\eta \to \infty} f_2' = 0$. Determinăm constantele a, b, γ, pînă acum arbitrare, astfel încît în punctul $\eta' = 2{,}0494 \in [\eta^{**}, \eta^*]$, f, f' și f'', scrise ca serii Taylor și asimptotice, oprindu-ne la termeni în ε, să fie egale [57].

Estimări asupra razei de convergență η^* a seriei Taylor pentru soluția lui Blasius au fost date fie folosindu-se metoda utilizată de Borel în demonstrarea elementară a teoremei lui Picard, fie folosindu-se seriile majorante ale lui Cauchy și Picard [148]; s-a găsit că $3{,}1 < \eta^* < 3{,}14$. J. Kuntzmann găsise $2{,}884 < \eta^* < 3{,}203$ [149].

Ramificarea soluției ecuației Falkner-Skan. În condițiile $f(0) = f'(0) = 0$, $\lim_{\eta \to \infty} f' = 1$, ecuația Falkner-Skan are soluții [108] numai pentru

Scanned with OKEN Scanner

$-0{,}198837 = \beta^* \leqslant \beta \leqslant 2$. Calculele numerice ale lui Hartree [62] au arătat că pentru $\beta < 0$, unicitatea soluției se pierde. Prin soluție se înțelege acea funcție $f(\eta)$ care satisface ecuația lui Falkner-Skan, condițiile de mai sus, și care are $f' \leqslant 1$, ceea ce revine la cerința ca în stratul limită viteza tangențială să fie mai mică decît cea de la $\eta \to \infty$. Prin introducerea lui $f''(0)$ se obține o problemă Cauchy care avea soluție unică pentru constanta arbitrară $f''(0)$; $f''(0)$ se determină astfel încît să fie satisfăcută condiția la infinit. O analiză a perturbației condusă doar pînă la termeni de ordinul întîi a arătat, în cazul $\beta < 0$, existența unei infinități de $f''(0)$ care satisfăceau condiția la infinit. Dintre toate aceste soluții, Hartree, a ales, pe baza studiului unei ecuații asemănătoare cu ecuația Falkner-Skan, pe aceea pentru care $y' \to 1$ (prin valori mai mici) cel mai repede cu putință. Frecarea la perete corespunzătoare acestei soluții depindea continuu de $|\beta|$ în $\beta = 0$. Studiind comportarea soluției în vecinătatea lui β^{**}, Hartner a indicat existența a două valori diferite ale lui $f''(0)$ corespunzătoare aceleași valori β din apropierea lui β^*. Ulterior, [5], [108], [58], analiza perturbației ecuației neliniare a lui Falkner-Skan ce conține parametrul β a dus la concluzia că în β^* soluția se ramifică în două ramuri de soluții: o ramură (pentru $\beta^* \leqslant \beta \leqslant 2$) corespunzătoare valorilor pozitive ale lui $f''(0)$ și deci mișcării dinspre amonte în aval iar cea de-a doua, pentru $\beta^* < \beta < 0$, corespunzătoare valorilor $f'(\eta) < 0$ (și deci $f''(\eta) < 0$) pentru η mici, pentru care mișcarea are sens opus [108], [5]. Astfel, fie $\beta^* < \beta_0 \leqslant 2$ și $f(\eta) = f_0(\eta)$ o soluție corespunzătoare lui $\beta = \beta_0$, presupusă cunoscută și pentru β apropiat de β_0 să notăm soluția sub forma

$$f(\eta) = f_0(\eta) + (\beta - \beta_0) f_1(\eta) + (\beta - \beta_0)^2 f_2(\eta) + \dots;$$

introducînd această soluție în ecuația Falkner-Skan și în condițiile la limită obținem că f_1, f_2, ... satisfac ecuații liniare neomogene, ale căror ecuații omogene corespunzătoare au doar soluția identic nulă [22]. Deci, după alternativa lui Fredholm, ecuațiile neliniare neomogene au soluție unică astfel că pentru $\beta^* < \beta_0 \leqslant 2$, soluția ecuației lui Falkner-Skan de forma de mai sus este mică. În schimb, pentru $\beta = \beta^*$, ecuațiile omogene despre care a fost vorba admit soluția nebanală egală cu $f_0'(\eta)$ și, după alternativa lui Fredholm, deoarece soluția problemei adjuncte corespunzătoare ecuațiilor omogene nu este ortogonală pe membrul drept al ecuațiilor neomogene, ecuațiile neomogene nu admit soluții, prin urmare nici ecuația Falkner-Skan n-are soluții sub formă de serii de puteri întregi ale lui $\beta - \beta^*$. Să căutăm acum pentru $\beta > \beta^*$, β apropiați de β^*, soluții de forma

$$f(\eta) = f_0(\eta) + (\beta - \beta^*)^{\frac{1}{2}} f_{\frac{1}{2}}(\eta) + (\beta - \beta^*) f_1(\eta) + \dots;$$

$f_0(\eta)$ aste presupusă cunoscută și este una din cele două soluții corespunzătoare curgerilor directe sau de întoarcere. Ca mai sus, prin înlocuirea acestei expresii în ecuația lui Falkner-Skan, se găsesc ecuațiile pe care le verifică $f_{\frac{1}{2}}$, f_1 etc. În particular, se arată că $f_{\frac{1}{2}}(\eta) = a f_0'(\eta)$, unde a este o constantă care se determină din condiția ca ecuația în f_1 să admită soluție. Astfel se găsesc [5] pentru a două valori $a = \pm (I_1/I_2)^{\frac{1}{2}}$ astfel că, în vecinătatea lui β^*, avem două ramuri de soluții

$$f(\eta) = f_0(\eta) \pm \{(\beta - \beta^*) I_1/I_2\}^{\frac{1}{2}} f_0'(\eta) + \theta(\beta - \beta^*)$$

așa cum afirmase Hartree. Pentru fiecare β avem cîte o soluție, soluția cu minus corespunzînd mișcării de întoarcere (recirculare) (fig. 1.2.1.) $f''(0)$ este funcție multiformă de β, pe cînd β este funcție în sens obișnuit de

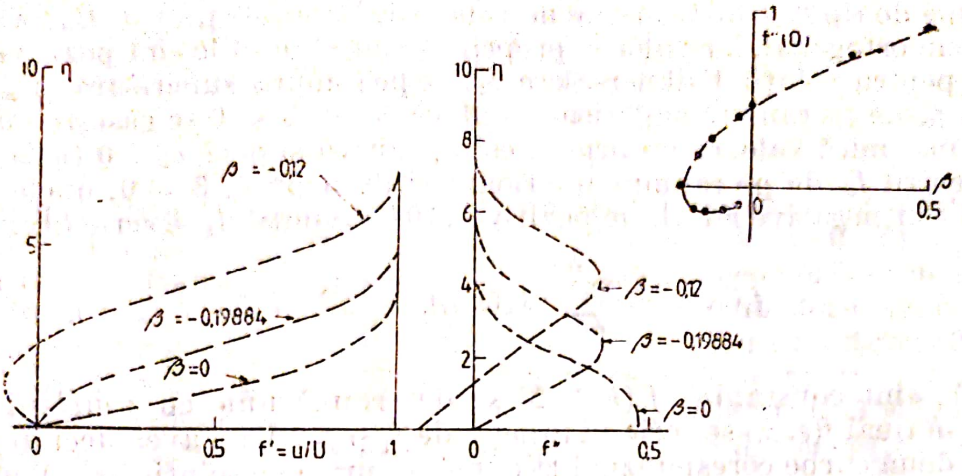


Fig. 1.2.1

$f''(0)$. Pentru $f''(0)$ rezultă deci un singur număr $\beta = \beta^* = -0{,}198837$ și deci $m \simeq -0{,}0904$; rezultă că pentru curenți exteriori stratului limită cu viteza $U = \text{const.}\ x^{-0{,}0904}$, profilele corespunzătoare din stratul limită se află la începutul desprinderii pentru orice x. În stratul limită corespunzător unui $U = \text{const.}\ x^m$ cu m astfel încît $0 > \beta > \beta^*$, avem zonă de recirculare.

Ramificarea soluțiilor aproape similare. Fie un strat limită laminar într-un fluid cu gradientul de presiune exterior constant $\beta \in [\beta^*, 2]$, avînd viteza $u = U f_\eta$, unde funcția de curent modificată $f(s, \eta)$ verifică problema inițială și la limită [41], [49] pentru ecuația lui Görtler

$$f_{\eta\eta\eta} + f f_{\eta\eta} + \beta (1 - f_\eta^2) = 2s (f_\eta f_{\eta s} - f_s f_{\eta\eta}),$$

$$f(s_i, \eta) = F(\eta), \quad f(s, 0) = f_\eta(s, 0) = 0, f_\eta(s, \infty) = 1,$$

unde $\eta = \rho\, U y r^j (2s)^{-\frac{1}{2}}$, $s = \rho\, \mu \int_0^x u r^{2j}\, dx$, s_i este o valoare inițială a lui s. Se caută soluții ale acestei probleme de forma

$$f(s, \eta) = f_\infty(\eta) + f_1(s, \eta) + f_2(s, \eta) + \dots,$$

unde $f_1 << f_\infty, f_2 << f_1 \dots$; $f_\infty(\eta)$ este o soluție similară Falkner-Skan care satisface condiția lui Hartree și diferă puțin de profilul inițial $F(\eta)$. Deci se caută soluții ale ecuațiilor stratului limită care într-un punct inițial s_i diferă puțin de o soluție similară, ceea ce justifică numele de soluții aproape similare. Funcția $f_1(s, \eta)$ verifică o ecuație liniară cu derivate parțiale de ordin trei, cu coeficienți variabili și condiții inițiale, la $\eta = 0$, și $\eta \to \infty$. Aplicînd metoda separării variabilelor $f_1(s, \eta) = S(s)N(\eta)$, se găsește $S = s^{-\frac{1}{2}\lambda}$ iar $N(\eta)$ satisface următoarea problemă de valori proprii

$$N_n''' + f_\infty N_n'' + (\lambda_n - 2\beta) f_\infty' N_\infty' + (1 - \lambda_n) f_\infty'' N_n = 0,$$

$$N_n(0) = N_n'(0) = \lim_{\eta \to \infty} N_n'(\eta) = 0.$$

Chen și Libly [22] au demonstrat că, deoarece f'_∞ este o soluție a acestei probleme, ecuația de ordin trei de mai sus poate fi redusă la o ecuație de ordin doi în $H_n = N_n/f'_\infty$ iar problema de valori proprii se va scrie ca o problemă de tip Sturm-Liouville nestandard. Funcțiile proprii H_n formează un sistem ortogonal, iar valorile proprii λ_n sînt reale. Ele sînt pozitive dacă $\beta > 0$ pentru soluții Falkner-Skan f_∞ de pe ramura superioară ($f'_\infty > 0$). Pentru f_∞ de pe ramura superioară și dacă $\beta^* < \beta < 0$ se găsește numeric că cea mai mică valoare proprie λ_1 este pozitivă și deci $\lambda_n > 0$ ($n \geqslant 1$), pe cînd pentru f_∞ de pe ramura inferioară și dacă $\beta^* < \beta < 0$, unele valori proprii sînt negative iar altele pozitive [194]. Soluția f_1 se scrie deci

$$f_1(s, \eta) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n (s/s_i)^{-\frac{1}{2}\lambda_n} N_n(\eta),$$

unde A_n sînt constante; $f_n (n \geqslant 2)$ se determină unic cu ajutorul lui f_1 și f_∞ și în final $f(s, \eta)$ se scrie în funcție de f_1 și f_∞. Vom avea deci în planul (λ_1, β) două curbe corespunzînd la două ramuri și de soluții $f(s, \eta)$ în funcție de β după cum f_∞ este pe ramura superioară sau inferioară în planul $(f''_\infty(0), \beta)$. β^* este punct de ramificare și pentru soluțiile aproape similare.

Cînd toți $\lambda_n > 0$, atunci fiecare termen din f_1 tinde la zero pentru $s \to \infty$ și deci $f(s, \eta)$ tinde către soluția similară f_∞. Aceasta se întîmplă cînd f aparține ramurei superioare. Dacă există și valori proprii negative, deci pentru soluții ale ramurei inferioare, avem că f crește nemărginit pentru $s \to \infty$ și deci ea nu tinde către soluția similară. În acest fel în [22] se demonstrează că soluțiile aproape similare tind către cele similare atît pentru gradienți favorabili de presiune ($\beta \geqslant 0$), așa cum dovedise Serrin (§ 2,2), cît și pentru mici gradienți adverși de presiune $\beta^* < \beta < 0$.

Faptul că $f \to f_\infty$ pentru $s \to \infty$ exprimă și stabilitatea liniară spațială a soluției similare f_∞ în clasa soluțiilor staționare. Să remarcăm că atît comportarea asimptotică, cît și stabilitatea prezentate mai sus sînt valabile în cadrul unei teorii liniare atît timp cît nu s-a demonstrat riguros că principiul liniarizării este valabil. În acest sens rezultatul lui Serrin apare ca riguros.

Remarcăm că β^* este atît punct de ramificare, cît și de stabilitate marginală, fiind la intersecția celor două ramuri de soluții stabile și instabile.

Pentru alte rezultate privind bifurcarea unor soluții din teoria stratului limită, bazate pe metode de perturbații în care soluția se caută sub formă de serie după puterile fracționare ale unui parametru mic, trimitem la [5].

§ 1.3. Forme echivalente ale ecuației lui Prandtl și metode de rezolvare a lor

1.3.1. Transformări de coordonate

Transformarea lui von Mises $(x, y) \to (\xi, \eta)$ se aplică doar mișcărilor (care nu sînt de întoarcere) bidimensionale, staționare ale fluidelor incompresibile; noile variabile independente ξ, η se definesc în funcție de vechile variabile independente, cît și de soluția u a problemei staționare

deduse din (1.2.2), (1.2.6) — (1.2.11). Fie deci $u(x, y)$ astfel încît $u > 0$ pentru $(x, y) \in [0, X] \times (0, \infty)$, $\int_0^\infty u(x, y')dy' = 0$ pentru $x \in [0, a]$; atunci transformarea lui von Mises, în cazul pereţilor impermeabili, este definită prin

$$\xi = x, \ \eta = \int_0^y u(x, y')\, dy'. \tag{1.3.1}$$

Cum proprietăţile acestei transformări depind de u, dacă $u \in C\ [0, X] \times [0, \infty)$), $u_x, u_y \in C((0, a] \times (0, \infty))$, u_{yy} este definită în $(0, X) \times (0, \infty)$, atunci transformarea lui von Mises defineşte un omeomorfism de la mulţimea $[0, X] \times [0, \infty)$ în ea însăşi căci iacobianul transformării este egal cu $u(x, y)$ şi, prin ipoteză, el este nul numai pe frontiera mulţimii $[0, X] \times [0, \infty)$. În plus, $\eta(x, y) \to \infty$ cînd $y \to \infty$ uniform pentru $x \in [0, X]$, iar transformarea inversă $(\xi, \eta) \to (x, y)$ are proprietatea că $y(\xi, \eta) \to \infty$ cînd $\eta \to \infty$ uniform în $\xi \in [0, X]$. Din (1.3.1) şi din ecuaţia de continuitate avem imediat

$$\xi_\xi = 1 = \xi_x \hat{x}_\xi + \xi_y \hat{y}_\xi, \ \xi_\eta = 0 = \xi_x \hat{x}_\eta + \xi_y \hat{y}_\eta, \ \eta_\xi = 0 =$$

$$= \eta_x \hat{x}_\xi + \eta_y \hat{y}_\xi, \ \eta_\eta = 1 = \eta_x \hat{x}_\eta + \eta_y \hat{y}_\eta,$$

$$\xi_x = 1, \ \xi_y = 0, \ \eta_x = \int_0^y u_x(x, y')\, dy' = -\int_0^y v_y\,(x, y')\, dy' =$$

$$= -\,v(x, y) + v(x, 0) = -\,v(x, y), \ \eta_y = u(x, y),$$

de unde rezultă

$$\hat{x}_\xi = 1, \ \hat{x}_\eta = 0, \ \hat{y}_\eta = \frac{1}{\eta_y} = \hat{u}^{-1}, \ \hat{y}_\xi = \hat{v}\,\hat{u}^{-1}$$

astfel încît

$$dy = \hat{y}_\xi\, d\xi + \hat{y}_\eta\, d\eta = \hat{v}\,\hat{u}^{-1} d\xi + \hat{u}^{-1}\, d\eta, \quad dx = d\xi.$$

Condiţia necesară şi suficientă pentru ca dy să fie diferenţială totală exactă este ca $(\hat{v}\,\hat{u}^{-1})_\eta = (\hat{u}^{-1})_\xi$ adică $\dfrac{\hat{v}_\eta \hat{u} - \hat{u}_\eta \hat{v} + \hat{u}_\xi}{\hat{u}^2} = 0$. Ultima relaţie este însă satisfăcută, numărătorul reprezentînd membrul stîng al ecuaţiei de continuitate scrisă în coordonatele (ξ, η). Atunci integrala din dy între punctele $(0, 0)$ şi (ξ, η) nu depinde de drum ; de aceea o putem lua în particular pe liniile $\eta = 0$ şi $\xi =$ constant astfel că avem

$$x = \xi, \ y = \int_0^\eta \hat{u}^{-1}(\xi, \eta')\, d\eta', \tag{1.3.1}'$$

Scanned with OKEN Scanner

unde căciula pusă unei funcţii indică transformata acelei funcţii în variabilele (ξ, η), cu alte cuvinte $u(x, y) = \hat{u}(\xi, \eta)$ în puncte care prin transformarea von Mises se corespund. Transformarea (1.3.1)′ este inversa lui (1.3.1).

Introducînd funcţia de curent ψ astfel încît $u = \psi_y$, $v = -\psi_x$, rezultă că $\eta = \psi$, deci noile coordonate sînt x şi funcţia de curent. În aceste coordonate ecuaţiile (1.2.2)′ devin ecuaţiile parabolice ale lui von Mises

$$M\hat{u} = \hat{u}\,\hat{u}_\xi - \hat{U}\hat{U}' - \frac{1}{\mathrm{Re}}(\hat{u}\,\hat{u}_{\eta\eta} + \hat{u}_\eta^2)\,\hat{u} = 0, \tag{1.3.2}$$

care are particularitatea că nu conţine funcţia v şi i se poate aplica lema lui Nagumo-Westphal ceea ce nu se întîmplă cu ecuaţiile lui Prandtl. Aceasta este cauza pentru care în studiile riguroase asupra ecuaţiilor stratului limită se foloseşte (1.3.2) şi nu ecuaţiile lui Prandtl. Acelaşi lucru ca şi pentru (1.3.2) se poate spune şi despre ecuaţia lui Crocco care va fi scrisă mai jos.

Prin introducerea presiunii totale $z = \hat{p} + \frac{\rho}{2}\hat{u}^2$, ecuaţia lui von Mises capătă forma $z_x = \nu u\, z_{\eta\eta}$ asemănătoare cu ecuaţia căldurii cu deosebirea că are coeficient variabil pe lîngă $z_{\eta\eta}$. La perete avem $u = 0$, $z_x \neq 0$ dar $z_{\eta\eta}$ are o singularitate care nu impietează asupra stabilităţii calculelor numerice bazate pe metoda diferenţelor finite căci lîngă perete, Görtler, folosind transformarea lui von Mises, alege pentru $\hat{u}$ o serie de puteri în $\psi^{\frac{1}{2}}$ care conţine singularitatea pentru $\psi \to 0$ (deci $y \to 0$). Totuşi lîngă perete apare o zonă de instabilitate numerică datorită schimbării de semn, lîngă perete, a lui z_ψ.

Datorită bijectivităţii corespondenţei dintre punctele (x, y) şi (ξ, η) ecuaţia peretelui devine $\eta = 0$ iar η se anulează numai pe peretele $y = 0$. Pe de altă parte, $\eta = 0$ dacă şi numai dacă $y = 0$. Atunci condiţiile (1.2.6)—(1.2.8) devin

$$\hat{u}(0, \eta) = \hat{u}_1(\eta),\ \eta \in (0, \delta);\ u(\xi, 0) = \hat{u}_2(\xi),\ \xi \in [0, X];\ \hat{u}(\xi, \eta_\delta) = \hat{U}(\xi),$$

unde $\eta_\delta = \eta(x, \delta)$. În teoria asimptotică, în loc de ultima condiţie se ia $\lim_{\eta\to\infty} \hat{u}(\xi, \eta) = \hat{U}(\xi)$.

Transformarea lui Crocco definită de relaţiile

$$\xi = x,\ \eta = u, \tag{1.3.3}$$

sau

$$\xi = x,\ \eta = \frac{u}{U(x)}, \tag{1.3.4}$$

pentru care ecuaţiile lui Prandtl devin ecuaţia parabolică a lui Crocco

$$\varphi_\xi + \hat{U}\,\hat{U}'\,\varphi_\eta/\eta - \nu\varphi^2\varphi_{\eta\eta}/\eta = 0,\ \varphi(\xi(x, y), \eta(x, y)) = u_y(x, y) \tag{1.3.5}$$

admite o discuţie analogă cu cea a lui von Mises. Aici remarcăm doar faptul că ea se poate folosi şi în cazul nestaţionar al fluidelor compresibile. Necunoscuta u a fost folosită pentru prima dată în teoria stratului ca variabilă independentă.

Pentru cazul tridimensional nu se cunoaşte o transformare analoagă celor ale lui von Mises şi Prandtl.

Transformarea lui Görtler este dată de

$$\xi = \frac{1}{\nu}\int_0^x u\,dx, \quad \eta = y\,u\left(2\nu\int_0^x u\,dx\right)^{-\frac{1}{2}}; \tag{1.3.6}$$

punînd funcţia de curent sub forma $\psi(x, y) = \nu\sqrt{2\xi}\ F(\xi, \eta)$, ecuaţiile lui Prandtl conduc la ecuaţia lui Görtler

$$F_{\eta\eta\eta} + F F_{\eta\eta} + \beta(\xi)\,[1 + F_\eta^2] = 2\xi\,[F_\eta F_{\xi\eta} - F_\xi F_{\eta\eta}], \tag{1.3.7}$$

iar condiţiile la limită din teoria asimptotică devin

$$F(\xi, 0) = 0,\ F_\eta(\xi, 0) = 0,\ \lim_{\eta\to\infty} F_\eta = g;$$

$\beta(\xi)$ este o funcţie cunoscută ce depinde de distribuţia de presiune a curentului exterior şi anume $\beta = \dfrac{2U_x\int_0^x U dx}{U^2}$.

Pentru $U = u_1 x^{m_1}$ (u_1, m_1-constante) funcţia β devine constantă, (1.3.7) conducînd la ecuaţia lui Falkner-Skan.

Transformarea lui Stepanov-Mangler [106] reduce ecuaţiile stratului limită bidimensional neplan pe corpuri alungite în rotaţie la acelea corespunzătoare cazului bidimensional plan. Ea este

$$\xi = \int_0^x r_0^2(x')dx', \quad \eta = r_0(x)y, \tag{1.3.8}$$

drept noi funcţii necunoscute fiind $\bar{u} = u$, $\bar{v} = v r_0^{-1} + r_0' u\ yr_0^2$, $\bar{U} = U$. Cu $r_0(x)$ s-a notat distanţa de la un punct de pe suprafaţa de rotaţie avînd abscisa curbilinie x la axa de rotaţie.

Transformarea lui Dorodnițîn reduce ecuaţiile lui Prandtl din cazul compresibil la unele aproximative din cazul incompresibil. Ea are forma $\xi = \int_0^x p/p_0 dx'$, $\eta = \int_0^y \rho/\rho_0\ dy'$, unde p_0 şi ρ_0 caracterizează curentul exterior stratului limită.

Transformările de mai sus sînt utilizate mai ales în teoria asimptotică a stratului limită. Dăm mai jos transformări în care grosimea δ a stratului limită intră în mod esenţial.

Transformări de similaritate sînt folosite atît în cazul staţionar cît şi nestaţionar. Pentru cazul staţionar transformarea de similitudine este

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{\delta} \tag{1.3.9}$$

Scanned with OKEN Scanner

iar viteza se ia de forma $u(x, y) = U(x) f_\eta(x, \eta)$ astfel că ecuaţia lui Prandtl se scrie

$$(1.3.10)\quad -\nu(U/\delta^2)\,[f_{\eta\eta\eta} + \delta(\delta U)_x\,\nu^{-1} f\,f'' + \delta^2\,U_x\nu^{-1}(1 - f_\eta^2)] + \\ + U^2(f_\eta f_{\eta x} - f_{\eta\eta} f_x).$$

Transformările lui Săvulescu sînt date de

$$(1.3.11)\quad \xi = x,\ \eta = \frac{\int_0^y T_1(u)\,\mathrm{d}x}{\int_0^\delta T_2(u)\,\mathrm{d}y'}$$

în care T_1 şi T_2 sînt doi operatori definiţi pe mulţimea funcţiilor u suficient de netede pentru ca să aibă derivatele ce apar în ecuaţiile lui Prandtl pe $[0, X] \times [0, \infty)$ şi care satisfac condiţiile (1.2.6) — (1.2.8). De asemenea, aceste funcţii nu trebuie să anuleze numitorul din (1.3.11) şi iacobianul transformării în $(0, X) \times (0, \infty)$ care este egal cu $T_1(u) \cdot \left(\int_0^\delta T_2(u)\,\mathrm{d}y'\right)^{-1}$. Notînd funcţiile transformate $\hat{u}(\xi(x, y), \eta(x, y)) = u(x, y)$, $\hat{v}(\xi(x, y), \eta(x, y)) = v(x, y)$, $U(x) = \hat{U}(\xi)$, ecuaţiile lui Prandtl şi ecuaţia de continuitate devin

$$(1.3.12)\quad \begin{cases} \hat{u}\,u_\xi + \hat{u}\,\hat{u}_\eta\,\eta_x + v\,\hat{u}_\eta\,\eta_y = \hat{U}\,\hat{U}_\xi + \dfrac{1}{\mathrm{Re}}\,[\hat{u}_{\eta\eta}\eta_y^2 + \hat{u}_\eta\,\eta_{yy}], \\ \hat{u}_\xi + \hat{u}_\eta\,\eta_x + \hat{v}_\eta\,\eta_y = 0, \end{cases}$$

unde

$$\eta_x = \left[\int_0^y T_{1u}\,u_x\,\mathrm{d}y' \int_0^\delta T_2\,\mathrm{d}y' - \int_0^y T_1\,\mathrm{d}y' \int_0^\delta T_{2u}\,u_x\,\mathrm{d}y'\right]\left[\int_0^\delta T_2\,\mathrm{d}y'\right]^{-2};$$

$$\eta_y = T_1\left[\int_0^\delta T_2\,\mathrm{d}y'\right]^{-1};\quad \eta_{yy} = T_{1u}\,u_y\left[\int_0^\delta T_2\,\mathrm{d}y'\right]^{-1};$$

Condiţiile la limită (1.2.6) — (1.2.8) se scriu

$$\hat{u}(0, \eta) = \hat{u}_1(\eta),\ \eta \in (0, \eta_\delta);\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_2(\xi),\ \xi \in [0, X];\ \hat{u}(\xi, \eta_\delta) = \hat{U}(\xi).$$

În cazul $T_1 = T_2$, singurul considerat mai departe, variabila η apare ca normată, ea variind acum între 0 şi 1 ($\eta \in [0,1]$).

a) Dacă $T_1(u) = u^m$, m real, pozitiv, atunci transformarea (1.3.11) corespunzătoare este bijectivă, anulîndu-se doar pe frontiera mulţimii $[0, X] \times [0, \infty]$.

Scanned with OKEN Scanner

b) Transformarea lui (von Mises generalizată) Săvulescu-Ferrari $T_1(u) = u$; atunci $\xi \in [0, X]$, $\eta \in [0, 1]$, transformarea (1.3.11) este bijectivă. Ea se mai poate scrie $\xi = x$, $\eta = \dfrac{\psi(x, y)}{\psi_\delta(x)}$ deci generalizează transformarea lui von Mises, printr-o normare. Transformarea sa inversă este

$$x = \xi, \; y = \psi_\delta \int_0^\eta \hat{u}^{-1} \, d\eta' \tag{1.3.13}$$

iar ecuațiile lui Prandtl și cea de continuitate devin ecuațiile lui Săvulescu

$$\hat{u}\,\hat{u}_\xi \frac{\hat{u}}{\psi_\delta} \psi\, \delta_x\, \eta\, \hat{u}_\eta = \hat{U}\hat{U}_\xi + \frac{\hat{u}}{2\mathcal{R}e\,\psi_\delta^2}(\hat{u}^2)_{\eta\eta}. \tag{1.3.14}$$

Ecuația de continuitate a furnizat pe v de forma

$$v = -(\eta\psi_\delta)_x \tag{1.3.15}$$

iar condițiile la limită devin

$$\hat{u}(0, \eta) = \hat{u}_1(\xi), \; \eta \in (0, 1); \; \hat{u}(\xi, 0) = \hat{u}_2(\xi), \tag{1.3.16}$$

$$\xi \in [0, X); \; \hat{u}(\xi, 1)\, \hat{U}(\xi).$$

Transformarea (1.3.11) conține drept cazuri particulare transformarea lui von Mises (care se obține pentru $T(u) = u$, $T(U) = 1$), transformarea lui Crocco (corespunzătoare lui $T_1(u) = T_2(u) = u_y$ și transformarea de similaritate ($T_1(u) = T_2(u) = 1$). Formal, transformarea lui Săvulescu-Ferrari pentru $\psi_\delta = 1$ se reduce la transformarea lui von Mises.

Menționăm că transformarea (1.3.11) se poate folosi și în cazul tridimensional și nestațional.

Majoritatea transformărilor prezentate mai sus (von Mises, Crocco, Görtler, Săvulescu) au proprietatea că noile coordonate depind de viteză, ceea ce implică o anumită dificultate în revenirea la planul fizic. Totuși caracterul integral al unora dintre aceste transformări ușurează înțelegerea fenomenului fizic pe baza unor mărimi globale ale mișcării deduse din ecuațiile de mișcare cu ajutorul acestor transformări.

1.3.2. Formularea integro-diferențială a problemei matematice a mișcării fluidelor vîscoase în stratul limită

Așa cum am menționat, în teoria după grosime finită a stratului limită, apare ca necunoscută și grosimea δ a stratului limită; prin transformarea lui Săvulescu-Ferrari funcțiile necunoscute vor fi u și $\psi\delta$ deci va trebui să scriem încă o ecuație $\hat{u}$ și ψ_δ. În această secțiune ecuația diferențială (1.3.14) și condițiile (1.3.16), (1.2.9) —(1.2.11) vor fi reduse la o problemă echivalentă constînd dintr-o ecuație integro-diferențială în $\hat{u}$ și ψ_δ și o ecuație dedusă din aceasta pentru $\eta = 1$, cărora li se atașează, în cazul nestațional, condițiile inițiale. Mai departe ne vom referi la această problemă ca formularea integro-diferențială a lui Săvulescu — (FID).

Integrările implicate de transformarea lui Săvulescu-Ferrari și de formularea integro-diferențială a lui Săvulescu fac ca, caracteristicile globale ale mișcării să apară în această formulare explicit, ceea ce are drept

Scanned with OKEN Scanner

rezultat posibilitatea de a face noi simplificări în ecuațiile integro-diferențiale pe baza rezultatelor experimentale care au caracter global. Aceste simplificări nu mai erau posibile în ecuațiile lui Prandtl în care toți termenii aveau același ordin de mărime.

Metoda lui Săvulescu este aproximativă deoarece, deși formularea integro-diferențială nu conține în ea nici o simplificare, totuși în aplicații rezolvarea sistemului de ecuații integro-diferențiale privește doar primul pas într-un proces de aproximații succesive a cărui convergență nu este încă demonstrată. În schimb metoda lui Săvulescu are marele avantaj de a furniza formule analitice pentru caracteristicile stratului limită. Cu ajutorul formulării integro-diferențiale se poate face o tratare unitară practic a oricărei ecuații de tip strat limită.

La prima vedere formularea integro-diferențială este mai complicată decît forma originală diferențială a ecuației lui Prandtl. Datorită operatorului T implicat, a transformării geometrice de coordonate și includerii condițiilor la limită în ecuații, formularea oferă o motivație rațională pentru construirea unei metode aproximative conform următoarelor etape :

1) profilul de viteză este determinat din prima ecuație integro-funcțională trunchiată, într-o primă aproximație ca funcție numai de η prin neglijarea unor diferențe mici și datorită faptului că $T_\eta \approx \eta(2-\eta)$;

2) cealaltă ecuație devine ecuația diferențială cu coeficienți constanți în ψ_δ.

Prin două integrări succesive ale ecuației (1.3.14) între 1 și η și respectiv 0, η și ținînd seama de condițiile la limită (1.3.16), (1.2.9) — (1.2.11), se obține ecuația integro-diferențială

$$\nu\,\hat{u}^2 = 2\psi_\delta^2 \int_0^\eta \int_1^{\eta'} (\hat{u}_\xi - \hat{U}\,\hat{U}_\xi u^{-1})\,d\eta''\,d\eta' - (\psi_\delta^2)_\xi \int_0^\eta \int_1^{\eta'} \eta''\,\hat{u}_{\eta''}\,d\eta''\,d\eta' \tag{1.3.17}$$

care pentru $\eta = 1$ devine

$$\nu \hat{U}_e^2 = 2\,\psi_\delta^2 \int_0^1 \int_1^{\eta'} (\hat{u}_\xi - \hat{U}\,\hat{U}_\xi\,u^{-1})\,d\eta''\,d\eta' - (\psi_\delta^2)_\xi \int_0^1 \int_1^{\eta'} \hat{u}_{\eta''}\,\eta''\,d\eta''\,d\eta' \tag{1.3.18}$$

denumită de obicei ecuația lui ψ_δ. Se înmulțește (1.3.18) cu $\left[\int_0^\eta \int_1^{\eta'} \eta''\,\hat{u}_{\eta''}\,d\eta''d\eta'\right]\left[\int_0^1 \int_1^{\eta'} \hat{u}_{\eta''}\,\eta''\,d\eta''\,d\eta'\right]^{-1}$, iar ecuația obținută se scade din (1.3.17) găsindu-se, după adimensionalizarea $U_a = \hat{u}\,\hat{U}^{-1}$,

$$U_a^2 = T(\eta U_{a\eta}) + 2\psi_\delta^2 \frac{U_\xi}{U^2} \int_0^1 \eta(U_a^{-1} - U_a)\,d\eta \times \tag{1.3.19}$$

$$\times\,[T(U_a - U_a{}^1)(\eta) - T(U_{a\eta}\,\eta)].$$

Operatorul T, definit pe un subspațiu metric al funcțiilor $f \in C\,[0, 1]$ înzestrat cu metrica lui Cebîșev $\rho(Tf_1, Tf_2) = \max_{\eta\in[0,1]} |Tf_1(\eta) - Tf_2(\eta)|$ și dat de

$$(Tf)(\eta) = \frac{\int_0^\eta \int_1^{\eta'} f(\eta'')\,d\eta''d\eta'}{\int_0^1 \int_1^{\eta'} f(\eta'')\,d\eta''d\eta'},$$

va fi studiat în detaliu în capitolul III. Aici remarcăm doar proprietatea sa că pentru marea majoritate a funcţiilor din domeniul său de definiţie are loc inegalitatea [53]

$$\rho(Tf, T1) = \max_{\eta \in [0,\,1]} |Tf(\eta) - T1(\eta)| \leqslant \varepsilon < 1;$$

deci $T(\eta\, U_{a\eta}) \approx T1(\eta) = \eta(2-\eta)$ iar termenul al doilea din membrul drept al lui (1.3.19) se poate neglija. Atunci ecuaţia trunchiată

$$U_a^2 = T(\eta U_{a\eta}), \tag{1.3.19)'}$$

dă în prima aproximaţie $U_a^2 = \eta(2-\eta)$, adică profilul de viteze este $U_a(\eta) = \sqrt{\eta(2-\eta)}$. Atunci ecuaţia lui ψ_δ devine

$$(\psi_\delta^2)_\xi + 2A\, U_\xi\, U^{-1}\, \psi_\delta^2 - \nu\, BU = 0, \tag{1.3.20}$$

unde $A = (3\pi - 8)(20 - 6\pi)^{-1}$, $B = 6(10 - 3\pi)^{-1}$. În condiţia iniţială $\psi_\delta(0) = 0$ se găseşte, pentru $U(1-\xi)\, U_\infty$,

$$\psi\delta = \left\{ \frac{\nu\, BU}{2(1+A)} [(1-\xi)^{-2A} - (1-\xi)^2] \right\}^{\frac{1}{2}} \approx \sqrt{c_1 (3{,}2\, \xi^2 + 4{,}45\, \xi)}$$

unde $c_1 = 0{,}5\ \nu B\, U_\infty\, (1+A)^{-1}$.

Cu ajutorul transformării inverse (1.3.13), grosimea stratului limită devine (de asemenea pentru curentul exterior $U = (1-\xi)\, U_\infty$)

$$\delta = \psi_\delta \int_0^1 U_a^{-1}\, U^{-1}\, \mathrm{d}\eta = \psi_\delta (1-\xi)^{-1}\, U_\infty^{-1} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\eta(2-\eta)}}\, \mathrm{d}\eta = \frac{\pi}{2}\, U_\infty^{-1} (1-\xi)^{-1} \psi\delta.$$

După integrarea ecuaţiei (1.3.14) între 1 şi η se obţine

$$\nu(\hat{u}^2)_\eta = -(\psi_\delta^2)_\xi \int_1^\eta \eta'\, \hat{u}_{\eta'}\, \mathrm{d}\eta' + 2\psi_\delta^2 \int_1^\eta (\hat{u}_\xi - \hat{U}\, u^{-1} \hat{U}_\xi)\, \mathrm{d}\eta'$$

deci frecarea $\tau = \mu u_y = \mu\, \psi_\delta^{-1}\, \hat{u}\, \hat{u}_\eta = 0{,}5\ \mu \psi_\delta^{-1}\, (\hat{u}^2)_\eta$ devine

$$\tau = 0{,}5\ \rho \psi_\delta^{-1} \left\{ -(\psi_\delta^2)_\xi \int_1^\eta \hat{u}_{\eta'} \eta' \mathrm{d}\eta' + 2\psi_\delta^2 \int_1^\eta (\hat{u}_\xi - \hat{U}\, \hat{u}^{-1} \hat{U}_\xi) \mathrm{d}\eta' \right\}.$$

Atunci abscisa ξ_s a punctului de separare verifică ecuaţia $\tau_w = \tau(\xi_s,\ 0)$ adică

$$(\psi_\delta)_\xi \int_0^1 \eta\, \hat{u}_\eta\, \mathrm{d}\eta + \psi_\delta \int_0^1 (\hat{U}\, \hat{U}_\xi\, \hat{u}^{-1} - \hat{U}_\xi)\, \mathrm{d}\eta = 0.$$

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL II

ANALIZA CALITATIVĂ A ECUAȚIILOR LUI PRANDTL

Capitolul de față prezintă rezultatele riguroase obținute în teoria asimptotică a stratului limită privind existența, unicitatea, stabilitatea soluțiilor ecuațiilor lui Prandtl, legătura lor cu soluțiile ecuațiilor lui Euler etc. prin aplicarea unor inegalități diferențiale parabolice ecuației lui Prandtl. Metoda constructivă de demonstrare a existenței soluției furnizează soluția aproximativă și eroarea de calcul.

§ 2.1. Existență și unicitate

Să presupunem că un fluid vîscos incompresibil are o mișcare plană în jurul unui corp solid rigid, în general poros. Fie axa x în direcția peretelui corpului, axa y perpendiculară pe ea și să notăm cu $(u(t, x, y), v(t, x, y))$, $p(t, x)$ viteza și respectiv presiunea din stratul limită iar cu $U(t, x)$ viteza curentului potențial din exteriorul stratului limită, presupusă cunoscută și verificînd ecuația lui Bernoulli pe suprafața corpului (Altfel spus, $U(t, x)$ este viteza curentului potențial în jurul aceluiași corp solid la $y = 0$). Cu aceste notații, luînd densitatea $\rho = 1$ și ținînd seama de ecuația lui Bernoulli

$$U_t + U\,U_x = -\,p_x,$$

ecuația parabolică a lui Prandtl se scrie

$$u_t + uu_x + vu_y = U_t + UU_x + \nu u_{yy} \text{ în } \mathscr{D}_t = [0, T)\times \times [0, X] \times [0, \infty). \tag{2.1.1}$$

Viteza trebuie să verifice ecuația de continuitate

$$u_x + v_y = 0 \text{ în } \mathscr{D}_t \tag{2.1.2}$$

și următoarele condiții inițiale și la limită

$$\lim_{t\to 0} u = u_0(x, y),\ (x, y) \in \mathscr{D}_X = [0, X]\times[0, \infty), \tag{2.1.3}$$

$$\lim_{x\to 0} u = u_1(t, y),\ (t, y) \in [0, T) \times [0, \infty), \tag{2.1.4}$$

$$\lim_{y\to 0} u = 0,\ \lim_{y\to 0} v = v_0(t, x),\ (t, x) \in [0, T)\times[0, X], \tag{2.1.5}$$

$$\lim_{y\to\infty} u = U(t, x), \tag{2.1.6}$$

la care se adaugă anumite condiții de compatibilitate.

Datele problemei (2.1.1) — (2.1.6) sînt : U, viteza curentului potențial ; u_0, viteza inițială ; u_1, viteza în secțiunea inițială, de multe ori numită viteză inițială în problemele staționare ; v_0 viteza de sucțiune (dacă $v_0 < 0$) sau de suflaj (dacă $v_0 > 0$) prin peretele poros $y = 0$; ν, vîscozitatea cinematică. Soluția problemei este perechea (u, v). Pentru definirea completă a soluției este necesară specificarea clasei căreia ea îi aparține. În diferite teoreme care urmează vor fi definite soluții clasice (care au cel puțin netezimea necesară ca membrii ecuațiilor (2.1.1) și (2.1.2) să fie funcții continue iar condițiile la limită să aibă loc în sensul continuității funcțiilor pe aderența domeniului lor de existență) și soluții slabe (care aparțin unui spațiu Sobolev, verifică o relație integrală dedusă din (2.1.1) și (2.1.2) iar la frontiera domeniului lor de existență tind în sensul acestor spații către funcții date).

Problema (2.1.1) — (2.1.6) în care $u_1 = 0$ corespunde așa-zisei mișcări simetrice iar cazul $u_1 > 0$, problemei continuării stratului limită. Cazul $u_0 = 0$ este cunoscut sub numele de formarea stratului limită, datorită semnificației sale fizice.

2.1.1. Mișcări staționare, plane, simetrice. Soluții clasice

Numim soluție clasică a ecuației lui Prandtl perechea (u, v), unde funcțiile u și v definite pe $\mathscr{D}_t$ sînt suficient de netede pentru ca problema (2.1.1) — (2.1.6) să aibă sens, în plus sînt satisfăcute relațiile (2.1.1) — (2.1.6) și condițiile respective de compatibilitate și $u > 0$ la $y > 0$ iar $\lim_{y \to 0} u_y > 0$. De fapt, dacă u este soluția problemei staționare bidimensionale, $u_1 > 0$, $u_{1y}|_{y=0} > 0$, $U_x(x) \geqslant 0$, $v_0(x) \leqslant 0$ în $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, atunci [127], [132], $u(x, y) > 0$ pentru $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, $0 < y < \infty$, iar $u_y(x, 0) > 0$ pentru $x \in (x_0, x_1)$. În general, în cazul staționar bidimensional se poate demonstra, cu ajutorul lemei lui Nagumo-Westphal [127], [132], că soluția clasică u nu poate depăși valoarea $\sqrt{U(x) + 2eU(x_0) + e^2}$, unde $e = \sup_{0 \leqslant y < \infty} |u_1(y) - U(x_0)|$; în cazul simetric avem $e = 0$ și deci u nu poate depăși U. Deci nu se iau în comparație curenți inverși și zone de separare. Aceste restricții matematice apar ca naturale căci ecuația (2.1.1) este asemănătoare ecuației căldurii, dar cu un coeficient de conductibilitate termică νu (neconstant).

TEOREMA 2.1.1. *Problema staționară corespunzătoare lui* (2.1.1) (2.1.2), (2.1.4) — (2.1.6) *în care* $U(x) = ax + U_1(x)$, $a = \text{const.} > 0$, $U(x) > 0$, U_{1x}, U_{1xx} *sînt mărginiți*, $U_1(x) = O(x^3)$, $U_{1xx} = O(x)$, $v_0(x) = b + v_1(x)$, $b = \text{const.}$, $v_1(x) = O(x^2)$, $v_{1x} = O(x)$ *are în domeniul* $\mathscr{D}_{X_1}\{0 \leqslant x \leqslant X_1,\ 0 \leqslant y < \infty\}$ (*unde* $X \geqslant X_1 = \text{const.} > 0$) *o soluție astfel încît* : uU^{-1}, $U^{-1}u_y$ *sînt continue și mărginite* ; $u > 0$ *pentru* $xy > 0$; $1 - uU^{-1} = \exp\{-(2\nu)^{-1} U_x(0)\ [y^2 + O(y^{1+\varepsilon})]\}$ *pentru* $y \to \infty$, *unde* $\varepsilon > 0$ *este arbitrar de mic* ; $U^{-1}u_y > 0$ *pentru* $y \geqslant 0$; $U^{-1}u_y \to 0$ *pentru* $y \to \infty$; u_x, u_y, u_{yy}, v, u_{xy}, u_{yyy} *sînt continue în interiorul lui* $\mathscr{D}_{X_1}$; u_x, u_y, u_{yy} *sînt mărginite și continue în raport cu* y *în* $\mathscr{D}_{X_1}$; v, u_{yy}/u_y *sînt continue în* y *în* $\mathscr{D}_{X_1}$; v, u_{xy} *sînt mărginite în orice subdomeniu compact al lui* $\mathscr{D}_{X_1}$;

Scanned with OKEN Scanner

u_{yyy} *este mărginit în* $\mathcal{D}_{x_1}$. *În plus, au loc mărginirile*

$$(2.1.7)\qquad \begin{cases} u_y \leqslant UY(uU^{-1})(1 + Mx^2) \leqslant C_6(U - u)\sigma(uU^{-1}), \\ u_y \geqslant UY(uU^{-1})(1 - Mx^2) \geqslant C_7(U - u)\,\sigma(uU^{-1}), \\ Y_\eta(uU^{-1})(1 + C_2x^2) \leqslant u_{yy}/u_y \leqslant Y_\eta(uU^{-1})(1 - C_1x^2), \end{cases}$$

$C_i = \text{const.}$, $M = \text{const.}$, $\sigma(uU^{-1}) = \sqrt{-\ln\mu(1 - uU^{-1})}$, $\mu = \text{const.}$, $0 < y < 1$, $\eta = uU^{-1}$; $Y(\eta)$ *este soluție a problemei*

$$(2.1.8)\qquad \begin{cases} \nu Y^2 Y_{\eta\eta} + (\eta^2 - 1)aY_\eta - \eta aY = 0, \\ Y|_{\eta=1} = 0,\ (\nu YY_\eta - bY + a)_{\eta=0} = 0. \end{cases}$$

Un caz particular al teoremei de mai sus în care însă în loc de $U(x)$ folosim presiunea $p(x)$ îl constituie următoarea [45]:

Teorema 2.1.2. *Fie* $-b_1x \leqslant p(x) \leqslant -a_1x$, $a_1, b_1 > 0$, $\eta = y\sqrt{\mathcal{R}e}$, *unde* y *este adimensionalizat și fie* $w(x, \psi)$ *funcția lui von Mises în care* $w(x, \psi) = u^2(x, \eta)$, ψ *fiind funcția de curent astfel ca* $u = \psi_\eta$ *și să punem* $v\sqrt{\mathcal{R}e} = \omega = -\psi_x$. *Să notăm cu* $w^0(x, \psi^0)$ *funcția lui von Mises corespunzătoare presiunii* $p(x) = -x$ *și fie* $w^1(x, \psi) = \sqrt{a_1}$, $w^0(\sqrt[4]{a_1}\,x, \psi)$, $w^2(x, \psi) = \sqrt{b_1}\ w^0(\sqrt[4]{b_1}\,x, \psi)$. *Dacă* $p(x)$ *este o funcție cu derivată Hölder continuă pe* $0 \leqslant x \leqslant 2$ *iar* $p(x)$ *satisface inegalitățile de mai sus, atunci există o soluție* $(u(x, y), \omega(x, y))$ *în domeniul* $0 < x < 2$, $y > 0$ *continuă în închiderea acestui domeniu și astfel încît* $u(0, y) = u(x, 0) = \omega(x, 0) = 0$ *și*

$$w^1(x, \psi) \leqslant w(x, \psi) \leqslant w^2(x, \psi).$$

Demonstrația constructivă a teoremei 2.1.1 se face folosind metoda liniilor drepte*) (straight-lines method) aplicată unei ecuații pentru funcția $w(\xi, \eta)$ deusă prin eliminarea lui v între (2.1.1) și (2.1.2) și prin efectuarea transformării lui von Mises. Fie acea ecuație $L(w) = 0$ în condițiile corespunzătoare la $\eta = 1$ și $\eta = 0$. Atunci, pentru orice funcție $f(x, \eta)$, scriem $f^k(\eta) = f(kh, \eta)$, unde $h = \text{const.} > 0$, $k = 0, 1, \ldots$ $[X\,h^{-1}]$, paranteza dreaptă desemnînd partea întreagă. Funcțiile w^k vor satisface o ecuație $L_k(w^k) = 0$ și condiții la limită corespunzătoare. Folosind teorema de punct fix a lui Leray-Schauder se demonstrează existența unei anumite ecuații $L_{\varepsilon,k}(w^k_\varepsilon) = 0$ care are proprietatea că $L_{\varepsilon,k} \to L_k$ oentru $\varepsilon \to 0$. În plus, se arată că pentru fiecare $\varepsilon > 0$ soluția w^k_ε este uniform mărginită în raport cu ε și echicontinuă pe subcompacte din D deci mulțimea soluțiilor w^k_ε formează un compact (teorema lui Arzelà). Atunci, din orice șir $\{w^k_{\varepsilon_n}\}$ cu $\varepsilon_n \to 0$ putem alege un subșir convergent către w^k. Mai departe, folosind principiul maximului se găsește că $w^0(\eta) \equiv Y(\eta)$ este uniform mărginită împreună cu Y_η și $YY_{\eta\eta}$; din aceste mărginiri se deduce că au loc și mărginirile uniforme pentru w^k, w^k_η și w^k $w^k_{\eta\eta}$. Deci, analog cu cele de mai sus, pentru $h \to 0$ rezultă existența soluției w drept limită: $w = \lim_{h\to 0} w^k(k\,h, y)$. Formulele care leagă pe u, v de w asigură în final existența lui u și v și a proprietăților menționate în teorema 2.1.1.

*) Metoda liniilor drepte este o variantă a metodei lui Dorotnițin a relațiilor integrale.

Scanned with OKEN Scanner

Teorema de unicitate de mai jos a fost dedusă aplicînd principiul maximului ecuației în $w_1 - w_2$, unde w_1, w_2 sînt două soluții ale ecuației lui Prandtl.

TEOREMA 2.1.3. [146]. *Problema staționară* (2.1.1), (2.1.2), (2.1.4)—(2.1.6) *are în* $\mathcal{D}_{X_1}$ *cel mult o soluție pentru care* u, v *au derivate continue* u_x, u_y, v_y, u_{yy}, u_{yyy}, u_{xy} *în interiorul lui* $\mathcal{D}_{X_1}$; uU^{-1}, $U^{-1}u_y$ *sînt continue în* $\mathcal{D}_{X_1}$; $u_y > 0$ *pentru* $y \geqslant 0$ *și* $x > 0$; $U^{-1}u_y > 0$ *pentru* $y = 0$; $U^{-1}u_y \to 0$ *cînd* $y \to \infty$ *și* u_{yy}/u_y, u_x, v *sînt continue în* y *pentu* $y = 0$.

Teoremele de mai sus au fost deduse în ipoteza $u_1 = 0$, deci am făcut o analiză lîngă punctul de stagnare.

2.1.2. Mișcări staționare, plane, cu profil $u_1 > 0$ la $x = 0$. Soluții clasice

Teoremele de existență și unicitate pentru acest caz vor fi expuse în § 2.3, unde se va da o interpretare corespunzătoare în funcție de punctul de desprindere. Aici menționăm doar că fenomenul fizic corespunzător este cel al continuării stratului limită.

2.1.3. Mișcări staționare, plane, cu profil $u_1 > 0$ la $x = 0$. Soluții slabe

Ca și în demonstrația teoremei 2.1.1, facem schimbarea lui Crocco $\xi = x$, $\eta = uU^{-1}(x)$ și introducem noua funcție $w(\xi, \eta) = u_y U^{-1}(x)$. Atunci problema (2.1.1) — (2.1.6) în cazul staționar se va reduce la ecuația

$$\nu w^2 w_{\eta\eta} - \eta U w_\xi + (\eta^2 - 1) U_x w_\eta - \eta U_x w = 0, \tag{2.1.9}$$

în domeniul $\Omega\{0 \leqslant \xi \leqslant X, 0 \leqslant \eta \leqslant 1\}$ cu condițiile la limită

$$w|_{\xi=0} = U^{-1} u_{1y} \equiv w_0(\eta),\ w|_{\eta=1} = 0,\ (\nu w w_\eta - v_0 w + U_x)|_{\eta=0} = 0. \tag{2.1.10}$$

Numim soluție slabă a lui (2.1.9) — (2.1.10) o funcție mărginită și măsurabilă $w(\xi, \eta)$ care are proprietățile: $w > 0$ pentru $0 \leqslant \eta < 1$, există w_η, $\iint_\Omega (w_\eta)^2 d\xi\, d\eta < \infty$ și satisface identitatea integrală

$$\iint_\Omega [\nu w \varphi_{\eta\eta} - \eta U w^{-1} \varphi_\xi + (\eta^2 - 1) w^{-1} U_x \varphi_\eta]\, d_\xi d_\eta - \int_{\eta=0} \varphi v_0 d_\xi - \int_{\xi=0} \eta U \varphi w_0^{-1}\, d\eta = 0. \tag{2.1.11}$$

pentru orice funcție φ cu derivate continue φ_η, φ_ξ, $\varphi_{\eta\eta}$ în Ω și care satisface condițiile la limită

$$\varphi|_{\eta=1} = 0,\ \varphi|_{\xi=x} = 0,\ \varphi_\eta|_{\eta=0} = 0. \tag{2.1.12}$$

Scanned with OKEN Scanner

TEOREMA 2.1.4. *Fie $U(\eta)$ o funcție continuă astfel încît U_x, v_0 sînt mărginite, $U_x > 0$ pentru $0 \leqslant x \leqslant X$ și w_0 satisface condițiile* $K(1-\eta)\sigma \leqslant w_0(\eta) \leqslant K_2(1-\eta)\sigma$, $K_1K_2 = \text{const.} > 0$, $\int_0^1 (w_{0\eta})^2 \, d\eta < \infty$. *Atunci există o soluție slabă w a problemei* (2.1.9), (2.1.10). *Această soluție poate fi obținută ca limită pentru $h \to 0$ a soluțiilor $w^k(\eta) = w(kh, \eta)$ ale problemei* (2.1.13), (2.1.14),

$$(2.1.13)\quad \nu w^k_{\eta\eta} + \eta U^k[(w^k)^{-1} - (w^{k-1})^{-1}]h^{-1} + (\eta^2 - 1)(w^k)^{-2}U^k_x w^k_\eta - \eta(w^k)^{-1}U^k_x = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, [X h^{-1}], \; w^0(\eta) \equiv w_0(\eta),$$

$$(2.1.14)\qquad w^k|_{\eta=1} = 0, \quad (\nu w^k w^k_\eta - v^k_0 w^k + U^k_x)_{\eta=0} = 0,$$

și are proprietățile $K_3(1-\eta)\sigma \leqslant w(\xi, \eta) \leqslant K_4(1-\eta)\sigma$, K_3, $K_4 = \text{const.} > 0$; *există derivatele slabe w_η, w_ξ, $w_{\eta\eta}$ și următoarele integrale sînt mărginite*

$$\int_0^1\int_0^X (w_\eta)^2 \, d\xi d\eta, \int_0^1\int_0^X \eta^2(1-\eta)^2\sigma^2(w_{\eta\eta})^2 d\xi \, d\eta, \int_0^1\int_0^X \eta^4(w_\xi)^2 d\xi \, d\eta.$$

TEOREMA 2.1.5. *Soluția slabă w a problemei* (2.1.9), (2.1.10) *care satisface inegalitățile*

$$(2.1.15)\quad M_1(1-\eta)\sigma \leqslant w(\xi, \eta) \leqslant M_2(1-\eta)\sigma, \; M_1, \; M_2 = \text{const.} > 0,$$

este unică.

Teorema de unicitate 2.1.5 se demonstrează [146] cu ajutorul principiului de maxim. Teorema de existență 2.1.4, care în condiții mai restrictive asupra lui w_0 este analizată în [144], este demonstrată în [137], folosindu-se transformarea și funcția lui von Mises iar în [146], folosind transformarea lui Crocco. Demonstrația este analoagă celei a teoremei 2.1.1 și se bazează pe mărginiri ale unor integrale ale funcției necunoscute și derivatele sale, în timp ce pentru demonstrația teoremei 2.1.1 erau necesare mărginiri ale funcției necunoscute și a derivatelor sale.

Restricțiile asupra lui U pot fi înlocuite cu restricții asupra lui v_θ; existența, menționată de teorema 2.1.4, este valabilă pînă la punctul de separație $(X, 0)$ (§ 2.3).

2.1.4. Mișcări nestaționare, plane, simetrice cu $u_0 \equiv 0$. Soluții aproape peste tot (a.p.t.)

Spunem că (u, v) este o soluție a.p.t. a sistemului (2.1.1) — (2.1.6) dacă într-un domeniu $\mathscr{D}_t$ ea satisface acest sistem, abstracție făcînd de o mulțime de măsură Lebesgue nulă din $\mathscr{D}_t$.

Fie sistemul (2.1.1) — (2.1.6) în care $u_0 = 0$; demonstrarea existenței soluției sale corespunde situației fizice a formării (dezvoltării) stra-

Scanned with OKEN Scanner

tului limită pe corpuri care încep să se miște într-un fluid vîscos incompresibil.

TEOREMA 2.1.6. *Fie sistemul* (2.1.1) — (2.1.6) *în care* $u_0 \equiv 0$, $u_1 \equiv 0$, $U(t, x) = t^n U_1(t, x)$, $n \geqslant 1$, $U(t, 0) = 0$, $U_1(t, x) > 0$ *pentru* $x > 0$ *și* U_{1x}, $U_1^{-1} U_{1t}$, v_0 *posedă derivate de ordinul întîi în raport cu* x *și* t *mărginite. Atunci există o soluție a sistemului* (2.1.1) — (2.1.6) *în* $\mathscr{D}_{T_1}$ $\{0 \leqslant t \leqslant T_1, \quad 0 \leqslant x \leqslant X, \quad 0 \leqslant y < \infty\}$ *care are următoarele proprietăți:* uU^{-1}, $t^n U^{-1} u_y$ *sînt mărginite și continue în* $\mathscr{D}_{T_1}$; $u(t, x, y) > 0$ *pentru* $tx > 0$; $u \to U$ *cînd* $y \to \infty$ *și* $1 - u U^{-1}(t, x) = \exp\{-(4\nu t)^{-1}[y^2 + O(y^{1+\varepsilon})]$ *cînd* $y \to \infty$, *unde* ε *este o constantă arbitrară* $0 < \varepsilon < 1$; $t^n U^{-1} u_y > 0$ *pentru* $t > 0$, $t^n U^{-1} u_y \to 0$ *cînd* $y \to \infty$; u_y, u_x, u_{yy}, u_t, v_y *sînt mărginite și continue în raport cu* y *în* $\mathscr{D}_{T_1}$; $|u_y| \leqslant C_1 t^{n-0,5}$; $|u_{yy}| \leqslant C_2 t^{n-1}$; $|u_x| \leqslant C_3 t^n$; $|u_t| \leqslant C_4 t^{n-1}$; $|u_{yyy}| \leqslant C_5 t^{n-1,5}$; *funcțiile* $t^{-n+0,5} u_{xy}$, v, $t^{-n+1,5} u_{yt}$ *sînt mărginite pe orice compact din* $\mathscr{D}_{T_1}$; v *este continuă în raport cu* y *în* $\mathscr{D}_{T_1}$; $C_i = \text{const.} > 0$. *Să notăm cu* Y *soluția ecuației*

$$\nu Y^2 Y_{\eta\eta} - (n - 0,5)\, Y + n(\eta - 1)\, Y_\eta = 0 \tag{2.1.16}$$

în condițiile la limită

$$Y(1) = 0, \quad (\nu\, Y\, Y_\eta + n)_{\eta=0} = 0. \tag{2.1.17}$$

Atunci, soluția sistemului (2.1.1)—(2.1.6) *satisface următoarele mărginiri*

$$\Phi^{-1}(y(t^{-0,5} - \alpha)) \leqslant uU^{-1} \leqslant \Phi^{-1}(y(t^{-0,5} + \beta)),$$

unde α, $\beta = \text{const.} > 0$, Φ^{-1} *este inversa funcției* $\Phi(S) = \int_0^S Y(s)\, ds$,

$$|t^n U^{-1} u_y - t^{n-0,5} Y(uU^{-1})| \leqslant C_6 Y(uU^{-1}) t^n;$$

$$|t^n u_{yy}/u_y - t^{n-0,5}\, Y_\eta(uU^{-1})| \leqslant C_7 Y_\eta(uU^{-1}) t^n;$$

$$t[u_{yyy} u_y - (u_{yy})^2]\, u_y^{-2} < -C_8.$$

Soluția (u, v) *a problemei* (2.1.1)—(2.1.6) *este unică în clasa funcțiilor* u, v *pentru funcția* $w = t^n u_y U^{-1}$ *care satisface condițiile:* $w(\tau, \xi, \eta)$ *este continuă în* $\Omega_1\{0 \leqslant \tau \leqslant \tau_1, 0 \leqslant \xi \leqslant X, 0 \leqslant \eta \leqslant 1\}$, w_η *este continuă în raport cu* η *pentru* $\eta = 0$, w_η, $w_{\tau\eta}$, w_ξ, w_τ *sînt mărginite în interiorul oricărui domeniu din* Ω_1, $w_{\tau\eta} \leqslant 0$, $w \geqslant 0$ *în* Ω_1, $w|_{\eta=0} > 0$ *și* $ww_{1\eta}$, $w_1 w_\eta$, ww_1^{-1} *sînt mărginite. Am notat* $\tau = t^{n-0,5}$, $\xi = x$, $\eta = uU^{-1}$. w_1 *satisface problema (obținută din* (2.1.1)—(2.1.6) *prin schimbarea* $w(\tau, \xi, \eta) = t^n U^{-1} u_y$)

$$\nu w^2 w_{\eta\eta} - \tau^3(n - 0,5)\, w_\tau + n(\eta - 1)\, \tau^2 w_\eta - \eta\, U \tau^{2+2(2n-1)^{-1}} w_\xi +$$
$$+ [(\eta^2 - 1)\, U_x + (\eta - 1)\, U_1^{-1} U_{1t}] \tau^{2+2(2n-1)^{-1}} w_\eta + [-\eta U_x -$$
$$- U_1^{-1} U_{1t}]\, w \tau^{2+2(2n-1)^{-1}} = 0, w|_{\eta=1} = 0, w|_{\tau=0} = 0, \{\nu w w_\eta -$$
$$- v_0 w \tau^{1+(2n-1)^{-1}} + n\tau^2 + (U_x + U_1^{-1} U_{1t}) \tau^{2+2(2n-1)^{-1}}\}_{\eta=0} = 0$$

în care U_1, U_{1x}, $U_1^{-1} U_{1t}$, v_0 *au derivate în raport cu* ξ *și* τ *mărginite.*

Scanned with OKEN Scanner

Teorema 2.1.6 în cazul general $n \geqslant 1$ este demonstrată în [145]. (A se vedea, de asemenea, și [146].) Metoda folosită este cea a liniilor drepte și urmează exact procedeul care a stat la demonstrarea teoremei 2.1.1. Cazul $n = 1$ a fost studiat în [143]. În condiții mai restrictive asupra lui U și v_0 (de care depunde T_1) se poate demonstra nu numai o teoremă de existență locală în t, ci și una de existență globală în t.

Remarcăm că, datorită caracterului constructiv al demonstrației teoremei 2.1.6, dispunem de un șir de soluții aproximative care converge uniform către soluția exactă a stratului limită.

Cazul $U(x, t) = t^n U_1(x)$, cu n întreg, a fost considerat mai întii de Blasius (pentru $n = 0; 1$) și de Görtler (pentru $n = 0; 1; 2; 3; 4$); pentru detalii și pentru referințe la cazul altor tipuri de profile de viteze U din curentul exterior trimitem la [192].

2.1.5. Mișcări nestaționare, axial-simetrice, cu $u_0 > 0$. Soluții a.p.t.

În cazul mișcărilor axial simetrice, în loc de (2.1.2) avem ecuația de continuitate sub forma

$$(ru)_x + (rv)_y = 0, \tag{2.1.2)'}$$

unde $r(t, x)$ caracterizează frontiera corpului de rotație.

Teorema 2.1.7 *Fie* $U(t, x) = ax + b(t, x)x^3$, *unde* $a = \text{const.} > 0$ $b(t, x)$ *are derivate de ordinul doi mărginite,* $v_0 \leqslant N_1 x$, $v_{0t} \geqslant -N_2 x$ $|(Ur^{-1}r_x - U_x)_t| \leqslant N_3 x$. *Să presupunem că* $u_0(x, y)$ *satisface următoarele condiții:* $u_0 U^{-1}$ *este continuă în* $\mathcal{D}_X\{0 \leqslant t \leqslant T, 0 \leqslant x \leqslant X, 0 \leqslant y < \infty\}$, $u_0 > 0$ *pentru* $y > 0$, $x > 0$; $u_0|_{x=0} = 0$, $u_0|_{y=0} = 0$, $u_0 U^{-1} \to 1$ *cînd* $y \to \infty$, $U^{-1}u_{0y} > 0$ *pentru* $y \geqslant 0$ *și* $U^{-1}u_{0y} \to 0$ *cînd* $y \to \infty$. *Să mai presupunem că*

$$N_4(U - u_0)\sigma_0 \leqslant u_{0y} \leqslant N_5(U - u_0)\sigma_0;$$

$$-N_6\sigma_0 \leqslant u_{0yy}(u_{0y})^{-1} \leqslant -N_7\sigma_0,$$

$$|(U_{0y})^{-1}[u_{0yx}u_{0y} - u_{0x}u_{0yy}] + U^{-1}U_x(u_{0y})^{-1}[u_0u_{0yy} - (u_{0y})^2]| \leqslant$$

$$\leqslant N_8\sigma_0(U - u_0),$$

$$|(u_{0yyy}u_{0y} - u_{0yy})(u_{0y})^2| \leqslant N_9$$

$$[\nu u_{0yyy}u_{0y} - (u_{0yy})^2](u_{0y})^{-1} + [(u_0^2 - U^2)U^{-1}U_x u_{0yy}(u_{0y})^{-1}] \leqslant$$

$$\leqslant N_{10}xu_{0y},$$

unde $\sigma_0 = \sqrt{-\ln \mu(1 - u_0U^{-1})}$ *iar* N_i *și* μ *sînt constante pozitive. Să presupunem că au loc următoarele condiții de compatibilitate*

$$v_0(0, x)u_{0y}(x, 0) = U_t(0, x) + U(0, x)U_x(0, x) + \nu u_{0yy}(x, 0).$$

Atunci există o soluție unică a problemei (2.1.1), (2.1.2)', (2.1.3)—(2.1.6) *cu* $u_1 \equiv 0$, *care are proprietățile:* $u\,U^{-1}$, $U^{-1}u_y$ *sînt mărginite și continue în*

Scanned with OKEN Scanner

$\overline{\mathcal{D}}_X$; $u>0$ pentru $y>0$, $x>0$; $u \to U$ cînd $y \to \infty$, $u|_{y=0}=0$, $u|_{x=0}=0$, $U^{-1}u_y>0$ pentru $y \geq 0$, $U^{-1}u_y \to 0$ cînd $y \to \infty$; u_y, u_x, u_{yy}, u_t, v_y sînt mărginite în $\mathcal{D}_{X_1}$ și continue în raport cu y; $u_{yy}(u_y)^{-1}$, v sînt continue în raport cu y și mărginite în orice submulțime compactă din $\mathcal{D}_{X_1}$, $v|_{y=0}=v_0$, u_{yyy} este mărginită în $\mathcal{D}_{X_1}$; u_{yx}, u_{yt} sînt mărginite în orice submulțime compactă din $\mathcal{D}_{X_1}$. Funcțiile u,v satisfac sistemul de mai sus a.p.t. în $\mathcal{D}_{X_1}$. În plus

$$N_{11}(U-u)\sigma \leqslant u_y \leqslant N_{12}(U-u)\sigma,$$

$$N_{13}Ue^{-\alpha_2 y^2} \leqslant U-u \leqslant N_{14}Ue^{-\alpha_1 y^2},$$

$$-N_{15}\sigma \leqslant u_{yy}(u_y)^{-1} \leqslant -N_{16}\sigma,$$

$$|[u_{yyy}u_y-(u_{yy})^2](u_y)^2| \leqslant N_{17},$$

$$|(u_y)^{-1}(u_{yx}u_y-u_xu_{yy})+U^{-1}U_x(u_y)^{-1}[uu_{yy}-(u_y)^2]| \leqslant N_{18}(U-u)\sigma -$$

$$-N_{19}(U-u)\sigma \leqslant (u_y)^{-1}(u_{yt}u_y-u_tu_{yy})+U^{-1}U_t(u_y)^{-1}[uu_{yy}-(u_y)^2] \leqslant$$

$$\leqslant N_{20}x(U-u)\sigma,$$

unde $\sigma=\sqrt{-\ln \mu(1-uU^{-1})}$, N_i, α_1, α_2, $\mu=\text{const.}>0$, $\mu<1$; *constanta pozitivă* X_1 *depinde de* U, r, v_0, u_0.

Demonstrația acestei teoreme este analoagă celei a teoremei 2.1.1, cu deosebirea că pentru demonstrarea unicității nu poate fi aplicat direct un principiu de maxim [146], [144]. Pentru alte teoreme de existență și unicitate pentru mișcări axial simetrice trimitem la [142], [141], [221]; ele privesc atît cazul staționar cît și nestaționar și, de asemenea, sînt considerate soluții clasice sau slabe.

2.1.6. Mișcări plane, nestaționare, $u_1>0$

Problema continuării stratului limită plan, nestaționar (teoreme de existență și unicitate) a fost analizată în [138], [139], [142], [131]. În [139] pentru demonstrarea existenței și unicității se folosește transformarea lui Croeco $\tau=t$, $\xi=x$, $\eta=u(t,x,y)$, obținîndu-se pentru funcția $w=u_y$ un sistem căruia i se aplică metoda liniilor drepte. Această metodă este aplicată și în [142]. Unicitatea este demonstrată și în [131], aplicîndu-se lema lui Nagumo-Westphal sistemului în w.

Teoreme de existență pentru cazul plan au fost date în [224] folosindu-se metoda liniilor drepte și lema lui Nagumo-Westphal.

Folosirea anumitor metode de demostrare a teoremelor din acest paragraf are drept consecință aplicabilitatea lor doar pentru unele situații fizice caracterizate de datele U, u_0, u_1, v_0, ν; este posibil ca utilizarea altor teorii matematice să lărgească clasa mișcărilor pentru care se poate demonstra o teoremă de existență și unicitate.

Scanned with OKEN Scanner

§ 2.2. Dezvoltări asimptotice (Rezistența la înaintare. Rolul profilelor concave și al profilelor similare)

Teoremele de mai jos dau dezvoltări asimptotice pentru unele mărimi mecanice, printre care rezistența la înaintare și evaluări ale resturilor.

TEOREMA 2.2.1. *În condițiile teoremei* 2.1.6 *și pentru* $v_0 \equiv 0$ *iar* $U = t^n U_1(x)$, $U_1(x)$ *având derivate până la ordinul* $q+1$ *mărginite pentru* $0 \leqslant x \leqslant X$, *pentru soluția* (u, v) *a problemei* (2.1.1)—(2.1.6) *are loc estimarea*

$$(2.2.1) \qquad \left| t^n U^{-1} u_y - \sum_{j=0}^{q} Y_j(x, uU^{-1}) t^{n-0,5+j(n+1)} \right| \leqslant M^q t^{n-0,5+(q+1)(n+1)} Y(uU^{-1})$$

iar pentru rezistența la înaintare are loc următoarea dezvoltare asimptotică pentru $t \to 0$

$$(2.2.2) \qquad u_y\Big|_{y=0} = U_1(x) \sum_{j=0}^{q} Y_j(x, 0)\, t^{n-0,5+j(n+1)} + O(U_1(x)\, t^{n-0,5+(q+1)(n+1)}).$$

Am notat cu Y_j *soluția problemei*

$$\nu Y_0^2 Y_{j\eta\eta} + n(\eta - 1) Y_{j\eta} - (n - 0,5)\left(1 + j\frac{2n+2}{2n-1}\right) Y_j + 2\nu Y_0 Y_{0\eta\eta} Y_j +$$

$$+ \sum_{\substack{l+s+q=j \\ l\neq j, s\neq j, \rho\neq j}} \nu Y_l Y_s Y_{\rho\eta\eta} - \eta U_1(\xi)\, Y_{(j-1)\xi} + (\eta^2 - 1)\, U_{1x} Y_{(j-1)\eta} -$$

$$- \eta U_{1x} Y_{j-1} = 0, \quad (j = 1, \ldots, q),$$

$$Y_j|_{\eta=1} = 0, \left(\nu Y_0 Y_{j\eta} + \nu \sum_{\substack{l+s=j \\ s\neq j, l\neq j}} Y_l Y_{s\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_j\right)_{\eta=0} = 0, \text{ dacă } j = 2, \ldots q$$

și

$$Y_1|_{\eta=1} = 0, (\nu Y_0 Y_{1\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_1 + U_{1x})_{\eta=0} = 0$$

iar $Y_0 = Y$ *este soluția lui* (2.1.16), (2.1.17).

Demonstrația teoremei 2.2.1 se găsește în [145]. Relația (2.2.1) furnizează estimări pentru restul din dezvoltarea lui $t^n U^{-1} u_y$ în serii de puteri ale lui t și după funcțiile Y_j. Pentru alte dezvoltări asimptotice și evaluări ale restului trimitem la [145].

Comportarea asimptotică pentru $y \to \infty$ este conținută în teorema 2.1.6. Pentru $y \to \infty$ și $t \to 0$ trimitem la [145].

Să considerăm acum mișcarea plană, staționară, simetrică în stratul limită corespunzător unui curent exterior caracterizat de viteza

$$(2.2.3) \qquad U(x) = \sum_{m=0}^{q} a_m x^{2m+1} + u_{q+1}(x),$$

unde $a_0 = a > 0$, $a_m = \text{const.}$, $|u_{q+1}| \leqslant C_1 x^{2(q+1)+1}$, $|u_{(q+1)x}| \leqslant C_2 x^{2(q+1)}$, $|u_{(q+1)xx}| \leqslant C_3 x^{2q+1}$, pentru viteze la perete

$$v_0(x) = \sum_{m=0}^{q} b_m x^{2m} + v_{q+1}(x), \tag{2.2.4}$$

unde $b_0 = b$, $b_m = \text{const.}$, $|v_{q+1}| \leqslant C_4 x^{2(q+1)}$, $|v_{(q+1)x}| \leqslant C_5 x^{2q+1}$, $C_i = \text{const.}$ $(i = 1, \ldots, 5)$.

Fie $Y_m(\eta)$, $(m = 1, \ldots, q)$ soluţia sistemului

$$\begin{aligned} &\nu Y_0^2 Y_{m\eta\eta} + (\eta^2 - 1)\, a Y_{my} - 2\eta a\, Y_m + 2\nu Y_0 Y_m Y_{0\eta\eta} + \\ &+ \nu \sum_{\substack{\rho+l+s=m \\ l\neq m,\ \rho\neq m,\ s\neq m}} Y_l Y_s Y_{\rho\eta\eta} + (\eta^2 - 1) \sum_{\substack{s+\rho=m \\ \rho\neq m}} (2s+1) a_s Y_{\rho\eta} - \\ &- \sum_{\substack{s+\rho=m \\ \rho\neq m}} (2s+1)\, a_s Y_\rho - \eta \sum_{\substack{s+\rho=m \\ \rho\neq m}} 2\rho\, a_s Y_\rho = 0, \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

în condiţiile

$$\begin{aligned} &Y_m|_{\eta=1} = 0, \Big[\nu Y_0 Y_{m\eta} + \nu Y_{0\eta} Y_m - b Y_m - \sum_{\substack{l+s=m \\ s\neq m}} b_l Y_s + \\ &+ \nu \sum_{\substack{s+\rho=m \\ s\neq m,\ \rho\neq m}} Y_s Y_{\rho\eta} + (2m+1) a_m \Big]_{\eta=0} = 0, \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

unde Y_0 verifică sistemul (2.1.8).

Teorema 2.2.2. *Soluţia $u(x, y)$ a sistemului (2.1.1)—(2.1.6) corespunzătoare cazului staţionar, simetric şi lui U şi v_0 daţi de (2.2.3) şi (2.2.4) admite următoarea dezvoltare asimptotică*

$$u_y = U \sum_{m=0}^{q} x^{2m} Y_m(u U^{-1}) + O(U Y_0(u\, U^{-1}) x^{2q+2}) \text{ pentru } x \to 0,$$

unde Y_m satisfac (2.2.5), (2.2.6). În plus, pentru rezistenţa la înaintare avem

$$u_y|_{y=0} = U(x) \sum_{m=0}^{q} Y_m(0) x^{2m} + O(U(x) x^{2q+2}), \text{ pentru } x \to 0.$$

Demonstraţia teoremei 2.2.2 rezultă din relaţiile care au condus la teorema 2.1.1 [146].

Vom da acum două rezultate privitoare la comportarea la $x \to \infty$ a soluţiilor ecuaţiei lui Prandtl în cazul problemei continuării stratului limită staţionar, plan [199], [137], [136]. Să facem pentru aceasta transformarea lui von Mises $(x, y) \to (x, \psi)$, unde funcţia de curent $\psi(x, y)$ este definită de $u = \psi_y$, $v - v_0(x) = -\psi_x$, $\psi(x, 0) = 0$. Să notăm $w(x, \psi) = u^2(x, y)$ funcţia lui von Mises, care, în cazul care ne interesează, satis-

face ecuația

$$\sqrt{w}\, w_{\psi\psi} - w_x - v_0 w_\psi - 2p_x = 0, \tag{2.2.7}$$

în domeniul $D = \{(x, \psi) \mid 0 < x < \infty,\ 0 < \psi < \infty\}$ și condițiile la limită

$$w|_{\psi=0} = 0,\ w|_{x=0} = w^0(\psi) \tag{2.2.8}$$

unde $u^0\left(\int_0^y u^0(\eta)\, d\eta\right) \equiv (u^0(y))^2$,

$$w(x, \psi) \to U^2(x) \text{ pentru } \psi \to \infty. \tag{2.2.9}$$

TEOREMA 2.2.3. *Să presupunem că* $p_x \leqslant 0$; $w_1(x, \psi)$ *și* $w_2(x, \psi)$ *sînt două soluții ale problemei* (2.2.7), (2.2.8), *unde*

$$w_1|_{x=0} = w_1^0(\psi),\ w_2|_{x=0} = w_2^0(\psi) \tag{2.2.10}$$

și fie

$$\int_0^\infty |\sqrt{w_1^0(\psi)} - \sqrt{w_2^0(\psi)}|\, d\psi < \infty.$$

Atunci

$$\int_0^\infty |\sqrt{w_1(x, \psi)} - \sqrt{w_2(x, \psi)}|\, d\psi \leqslant \sqrt{p(0)\, p^{-1}(x)} \int_0^\infty |\sqrt{w_1^0(\psi)} - \sqrt{w_2^0(\psi)}|\, d\psi, \tag{2.2.11}$$

unde $2p(x) = -2(p(x) - p(0)) + K_0$, $K_0 = \max\limits_{\psi} \{w_1^0(\psi), w_2^0(\psi)\}$.

Această teoremă care exprimă ceva mai mult decît continuitatea soluției față de w^0 (și deci u^0), adică este o teoremă de stabilitate spațială față de perturbații ale condițiilor la $x = 0$ în sensul lui $\mathscr{L}_1(0, \infty)$, se demonstrează cu ajutorul principiului de maxim. Din (2.2.11) rezultă următoarea inegalitate

$$\left(\sqrt{w_1(X, \psi_0)} - \sqrt{w_2(X, \psi_0)}\right)^2 \leqslant \sqrt{\frac{p(0)}{p(x)}} \max_{\substack{x=X \\ \psi \geqslant \psi_0}} (w_1^{-\frac{1}{2}} |w_{1\psi}| + w_2^{-\frac{1}{2}} |w_{2\psi}|) \cdot \int_0^\infty |\sqrt{w_1^0(\psi)} - \sqrt{w_2^0(\psi)}|\, d\psi. \tag{2.2.12}$$

Pe baza inegalității (2.2.12) și a unor estimări pentru $\sqrt{w_i}$, $|w_{i\psi}|$, $(i = 1, 2)$, corespunzătoare unor soluții similare de tip Falkner-Skan ale ecuației lui Prandtl, acestea din urmă, folosindu-se, de asemenea, principiul maximului și proprietatea lui w de a fi funcție monotonă de p_x se poate demonstra următoarea [146]:

TEOREMA 2.2.4 *Fie*

$$-B(1 + x)^\gamma \leqslant p_x \leqslant -A(1 + x)^\alpha, \tag{2.2.13}$$

pentru $0 \leqslant x < \infty$, *unde* A, B *sînt constante pozitive iar constantele* γ, $\alpha \geqslant -1$. *Dacă* $\gamma > -\frac{1}{3}$, $\gamma \geqslant \alpha$, $v_0 \equiv 0$ *și dacă* w_1 *și* w_2 *sînt soluții ale problemei* (2.2.7), (2.2.8) *corespunzătoare profilelor* (2.2.10), *atunci*

$$|\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}|^2 \leqslant M_1(1+x)^{\frac{1}{8}(6\gamma-7\alpha-3)} \tag{2.2.14}$$

pentru $0 < \psi_0 \leqslant \psi \leqslant \psi_1 < \infty$, *unde* ψ_0, ψ_1, M_1 *sînt constante cu* $M_1 = M_1(\psi_0, \psi_1)$. *Dacă* $\gamma \leqslant -\frac{1}{3}$, $-\frac{5}{7} < \alpha \leqslant \gamma$, $v_0(x) \equiv 0$, *atunci*

$$|\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}|^2 \leqslant M_2(1+x)^{-\frac{1}{8}(7\alpha+5)} \tag{2.2.15}$$

pentru $0 < \psi_0 \leqslant \psi \leqslant \psi_1$, *unde* M_2 este *o constantă depinzînd de* ψ_0, ψ_1 *În plus, dacă* $\gamma < -\frac{1}{3}$, *atunci* $w_i \to 0$ *cînd* $x \to \infty$ *și*

$$|\sqrt{w_1(x,\psi)} - \sqrt{w_2(x,\psi)}|^2 \leqslant M_3(1+x)^{(3\gamma+1)/4}. \tag{2.2.16}$$

În teoremele 2.2.3 și 2.2.4 datele au fost ca în secțiunea 2.1.2. Remarcăm că în teorema 2.2.4 peretele $y = 0$ este impermeabil.

Soluțiile w_1 și w_2 din teoremele 2.2.3, 2.2.4 corespund acelorași date ν, U, v_0 dar la diferite profile inițiale.

Serrin [199] obține rezultate analoage celor din teorema 2.2.4 găsind mai întîi o teoremă intermediară de comportare asimptotică spre profile concave ($u_{yy} < 0$) și apoi folosind următoarea :

LEMA 2.2.1. *Fie* $U(x)$ *de două ori continuu diferențiabilă și* $UU_x > 0$. *Atunci, pentru o alegere convenabilă a datei inițiale* $u_1(y)$, *există o soluție* u *a ecuației lui Prandtl astfel încît* $u > 0$ *și* $u_{yy} < 0$ *pentru* $0 \leqslant x < \infty$, $0 < y < \infty$.

Teorema lui Serrin afirmă că pentru anumiți gradienți favorabili de presiune, orice profil de viteză din stratul limită bidimensional, staționar cu peretele impermeabil tinde la infinit aval către un profil convex. În cazul mai particular al profilelor potențiale din curentul exterior de forma $U(x) = C(x+d)^m$, $0 \leqslant x < \infty$, $C > 0$, $d \geqslant 0$, $m \geqslant 0$, Serrin demonstrează că orice profil din stratul limită corespunzător acestei date U tinde pentru $x \to \infty$ în aval către un profil similar de tipul $U(x) f(\zeta)$, unde $\zeta = y[\nu(x+d)U^{-1}(x)]^{-\frac{1}{2}}$ iar $f(\zeta)$ este funcția lui Falkner-Skan corespunzătoare lui $U(x)$ și anume

$$|uU^{-1} - f_\zeta| = 0\ [(1 + m \ln x)x^{-m}] \text{ pentru } x \to \infty \text{ uniform în } y. \tag{2.2.17}$$

Aceste rezultate arată importanța soluțiilor concave și similare în teoria stratului limită și constituie o justificare riguroasă a afirmației mecanicienilor că la infinit aval profilul de viteză corespunzător datei U de mai sus este un profil similar.

Să remarcăm faptul că deși profilele stratului limită cu anumiți $p_x < 0$ tind, pentru $x \to \infty$, către profile concave, nu înseamnă că în tot

Scanned with OKEN Scanner

stratul limită, deci pentru orice x, avem $u_{yy} < 0$. În schimb, dacă $p_x > 0$, atunci ecuația lui Prandtl implică $u_{yy} > 0$ lîngă perete, neexistînd profile concave în strat limită.

Serrin a dedus comportări asimptotice, de mari distanțe în aval și pentru coeficientul de frecare.

În particular, din teoremele de tip 2.2.3 și 2.2.4 rezultă și unicitatea asimptotică a profilelor stratului limită.

Presupunerea $p_x < 0$ este esențială pentru teoremele 2.2.3, 2.2.4 și pentru cele ale lui Serrin. În cazul gradienților adverși de presiune, chiar cînd valorile acestora sînt mici și deci cînd n-a avut încă loc desprinderea și nu există curenți de întoarcere, relațiile implicînd teoremele amintite nu mai sînt valabile. În consecință, în acest caz nu se cunosc comportări asimptotice.

O altă estimare a rapidității convergenței profilului de viteză către un profil similar a fost obținută de Peletier [152] în funcție de x și de funcția de curent ψ ca și Oleinik. Estimarea lui Peletier este mai bună. În [115] este schițată demonstrația lui Serrin în legătură cu concavitatea profilului de viteze din stratul limită.

Comportarea asimptotică pentru $y \to \infty$ este diferită de cea pentru $x \to \infty$ cînd soluțiile stratului limită tind către soluții similare. Cînd $y \to \infty$, soluția mărginită din stratul limită de $U(x)$ pentru $y \geqslant y_0$ tinde către $U(x)$ dacă în secțiunea inițială $x = 0$ am avut că $u_1(y) = u(0, y) \to U(0)$. Deci în acest caz, condiția la $y \to \infty$ devine de prisos, fiind automat satisfăcută. Pentru condiții mai restrictive sau mai largi asupra lui $u_1(y)$ vezi [128], [161]. Rata de convergență a lui $u(x, y) \to U(x)$, cînd $y \to \infty$, depinde de aceea a convergenței $u_1(y) \to U(0)$. Cu alte cuvinte, comportarea la $x = 0$ se resimte și determină comportarea asimptotică a lui u la $y \to \infty$, care este întotdeauna determinată [223]. Să menționăm și următorul rezultat

LEMA 2.2.2. *$u(x, y) < U(x)$ are loc în $[0, X] \times [0, \infty)$ dacă $u(x, 0) < U(x)$ în $[0, X]$ și $u(0, y) < U(0)$ pentru $y \geqslant 0$.*

Foarte util în probleme de existență, unicitate și comportare asimptotică a soluțiilor lui Prandtl se dovedește a fi și următoarea lemă a lui Velte [218]:

LEMA 2.2.3. *Fie o soluție a ecuației lui Prandtl, $u > 0$, în vecinătatea lui $x = 0$ și continuu diferențiabilă pe $y = 0$ și $UU_x \geqslant 0$; atunci $u > 0$ în $(0, \infty) \times (0,)$ și $u_y(x, 0) > 0$ pentru $x \in (0, \infty)$.*

Proprietatea de monotonie a lui w (și deci u) menționată mai jos este dată de [146], [199]:

LEMA 2.2.4. *Fie u' și u'' două soluții ale ecuației lui Prandtl staționară cu $v_0 \equiv 0$, corespunzătoare datelor U', u_1' și respectiv U'', u_1'' astfel încît*

$$(U'^2)_x \leqslant (U''^2)_x \text{ și } u'^2 \leqslant u''^2 + a^2$$

pentru anumite constante $a > 0$. Să presupunem că sau $u'_{yy} < 0$ sau $u''_{yy} < 0$. Atunci avem

$$u'(x, \psi) \leqslant u''(x, \psi) + a.$$

Avem, de asemenea [146], *$u' \geqslant u''$ dacă $(U'^2)_x \geqslant (U''^2)_x$ și $u_1' \geqslant u_1''$.*

Se arată că inegalitățile pentru u' și u'' sînt valabile nu numai în coordonatele lui von Mises, ci și în coordonate fizice.

Scanned with OKEN Scanner

În demonstrarea teoremelor 2.2.3 și 2.2.4 s-a folosit și următoarea lemă care exprimă faptul că orice soluție a ecuației lui Prandtl poate fi încadrată între două soluții similare. Aceasta subliniază încă o dată importanța soluțiilor similare în teoria stratului limită.

LEMA 2.2.5. *Fie* $U' = C'(x+d)^m$, $U'' = C''(x+d)^m$ *cu* C', C'', d *și* m *ca mai sus. Atunci pentru un profil de viteze în stratul limită* u, *există* C' *și* C'' *astfel încît* $u' \leqslant u \leqslant u''$ *(în variabilele lui von Mises), unde* u' *și* u'' *sînt profile similare corespunzătoare lui* U' *și* U''.

§ 2.3. Neexistența soluțiilor ecuațiilor lui Prandtl. (Punctul de desprindere)

Așa cum era de așteptat, soluția problemei mixte pentru ecuația lui Prandtl, depinzînd de datele U, u_0, u_1, v_0 și ν, există și este unică doar pentru anumite intervale de variație a lui x și are anumite proprietăți de netezime, comportare asimptotică, pozitivitate etc. doar pentru anumite valori ale lui y. Mai exact, există o valoare a lui x, notată x_s și numită punct de desprindere sau separare, astfel încît pentru $x > x_s$ soluția, definită ca funcție cu anumite proprietăți, nu există și o valoare a lui y notată δ și numită grosimea stratului limită, astfel încît pentru $y > \delta$ soluția în stratul limită este practic aceeași cu soluția potențială a ecuațiilor lui Euler. Să observăm că punctul de desprindere este caracterizat de $u_y(x_s, 0) = 0$ și $u_y(x, 0) > 0$ pentru $0 < x < x_s$. Valorile x_s și δ depind de datele U, u_0, u_1, v_0 și ν; această dependență va fi ilustrată numeric în capitolele următoare; x_s este dat de teoremele de neexistență în δ — de teoremele din §2.4. x_s și δ nu depind de metoda de demonstrație utilizată. Dăm mai jos teoreme de existență, unicitate și neexistență a soluțiilor ecuației lui Prandtl pentru o situație fizică caracterizată de datele u_1, p_x (deci U) și v_0 cu proprietățile de mai jos; demonstrația, bazată pe metoda liniilor drepte și folosirea funcției lui von Mises, se găsește în [137].

Să notăm $\mathcal{D}_{x_1}\{0 < x < x_1,\ 0 < y < \infty\}$ domeniul de definiție a lui u și v. Considerăm cazul staționar și presupunem $u_1(y) > 0$, pentru $y > 0$, $u_1 0) = 0$, $u_{1y}(0) > 0$, $u_1(y) \to U(0) \neq 0$ pentru $y \to \infty$, p_x și $v_0(x)$ sînt continuu diferențiabile pe $[0, x_1]$, $u_1(y)$, u_{1y}, u_{1yy} sînt mărginiți pe $0 \leqslant y \leqslant \infty$ și satisfac o condiție Hölder; în punctul (0,0) are loc condiția de compatibilitate

$$\nu u_{1yy}(y) - p_x(0) - v_0(0)\, u_{1y}(y) = O(y^2). \tag{2.3.1}$$

În teoremele care urmează, soluția (u, v) este luată în sens clasic și astfel încît $u > 0$ pentru $y > 0$ (vezi secțiunea 2.1.1).

TEOREMA 2 3.1. *În domeniul* $\mathcal{D}_{x_1}$ *pentru anumiți* $x_1 > 0$ *există soluția* (u, v) *a ecuației lui Prandtl în condițiile mai sus specificate pentru date, posedînd următoarele proprietăți: u este continuă și mărginită în* $\overline{\mathcal{D}}_{x_1}$, $u > 0$ *pentru* $y > 0$; $u_y > m > 0$ *pentru* $o < y \leqslant y_0$, *unde* m *și* y_0 *sînt anumite constante;* u_y *și* u_{yy} *sînt continue și mărginite în* $\mathcal{D}_{x_1}$ *iar* u_x, v, v_y *sînt continue și mărginite în orice parte compactă a lui* $\overline{\mathcal{D}}_{x_1}$. *Dacă* $u_{1y} \to 0$ *pentru* $y \to \infty$ *suficient de repede, atunci* u_x *și* v_y *sînt mărginite în* $\mathcal{D}_{x_1}$.

Scanned with OKEN Scanner

a) *Dacă* $p_x \leqslant 0$ *și* $v_0(x) \leqslant 0$ *sau dacă* $p_x < 0$ *pentru* $0 \leqslant x \leqslant x_1$, *atunci* x_1 *este orice număr real, deci soluția există în* $\mathcal{D}_{x_1}$ *cu* x_1 *arbitrar. Fie acum* p_x *de semn arbitrar în* $\mathcal{D}_{x_1}$.

b) *Dacă* $v_0 \leqslant 0$ *în vecinătățile punctelor în care* $p_x = 0$, *atunci soluția există în* $\mathcal{D}_{x_1}$ *pentru orice* x_1.

c) *Dacă* v_0 *este negativă și de modul suficient de mare în vecinătatea punctelor în care avem* $p_x > 0$, *atunci soluția există în* $\mathcal{D}_{x_1}$ *pentru orice* x_1.

Punctul a) afirmă existența mișcărilor în stratul limită în cazul gradienților favorabili de presiune și a sucțiunii; punctul b) indică existența mișcării în strat limită chiar cînd $p_x = 0$ dar are loc o sucțiune locală și punctul c) arată existența acestei mișcări chiar în prezența gradienților adverși de presiune dacă efectul lor este compensat de o sucțiune puternică; în acest fel sucțiunea poate îndepărta punctul de desprindere spre infinit aval. Influența opusă pe care suflajul o are asupra mișcării în stratul limită și în particular a punctului de separație este exprimată de următoarea:

TEOREMA 2.3.2. *Să presupunem că* $p_x < 0$ *pentru* $0 \leqslant x \leqslant x'$, $x' = const. \geqslant 0$ *și că* $p_x \geqslant 0$ *pentru* $x' \leqslant x \leqslant x' + \delta$, $\delta = const. > 0$. *Atunci soluția* (u, v) *a ecuației lui Prandtl, definită mai înainte de teorema* 2.3.1, *nu există în domeniul* $\mathcal{D}_{x'+\alpha}\{0 < x < x' + \alpha, \quad 0 < y < \infty\}$, $\alpha = \text{const.} \leqslant \delta$ *dacă* $v_0(x)$ *este pozitiv și suficient de mare pentru* $x' < x < x' + \alpha$. *Punctul de separație pentru astfel de straturi limită aparține intervalului* $x' < x < x' + \alpha$. *Deci, în particular, dacă* $p_x = 0$ *și* $v_0(x) > 0$, *în general, pentru* x_1 *mari nu există soluție clasică a ecuației lui Prandtl pentru care* $u > 0$ *la* $y > 0$. *În acest caz are loc întotdeauna desprinderea pentru* $v_0(x)$ *suficient de mare. Dacă* p_x *este de semn variabil, atunci soluția ecuației lui Prandtl nu există pentru* x_1 *mari și anume pentru* $x_1 > x_s$, *unde* x_s *satisface relațiile*

$$\max u_1^2(y) - 2\int_0^{x_s} p_x dx = 0 \text{ și } p_x(x_1) > 0.$$

Menționăm, că, constrîngerea (2.3.1) poate fi înlăturată astfel: fie (u^n, v^n) soluții a căror existență este dată de teorema 2.3.1 și astfel încît $u^n|_{x=0} = u_0^n(y)$ unde u_0^n satisface condițiile teoremei 2.3.1 iar $u_0^n(y) \to u_0$ cînd $n \to \infty$. Atunci soluția (u^n, v^n) tinde către soluția (u, v) care nu mai satisface neapărat condiția (2.3.1).

Pentru cazul mai simplu al peretelui impermeabil o teoremă de existență este demonstrată, folosindu-se funcția lui von Mises în [45] și [139]. Dăm mai jos o teoremă de unicitate a soluției clasice a problemei continuării stratului limită plan staționar.

TEOREMA 2.3.3. *Fie* (u, v) *continuă în* $\mathcal{D}_{x_1}$ *cu* $0 < u < C$ *pentru* $\psi > 0$ *soluție a ecuației lui Prandtl în cazul de care ne ocupăm. Dacă*

(2.3.2) $$\alpha_1 y \leqslant u \leqslant \alpha_2 y \text{ pentru } 0 < y \leqslant y_0;$$

(2.3.3) $$u_{yy} \leqslant \alpha_3 \text{ în } \mathcal{D}_{x_1},$$

au loc pentru anumite constante pozitive α_1, α_2, α_3 *și* y_0, *atunci soluția ecuației lui Prandtl cu aceste proprietăți este mică. Dacă* $p_x \leqslant 0$, $v_0(x) \leqslant 0$, *atunci unicitatea rămîne valabilă și în absența restricțiilor* (2.3.2), (2.3.3). *Dacă* $p_x \leqslant 0$ *iar* $v_0(x)$ *este arbitrară, atunci condiția* (2.3.2) *nu mai este necesară pentru demonstrarea unicității.*

Scanned with OKEN Scanner

§ 2.4. Legătura dintre ecuațiile Navier-Stokes și ecuațiile lui Prandtl

Cazul cel mai general în care a fost analizată problema legăturii dintre soluțiile ecuațiilor Navier-Stokes și cele ale lui Prandtl este acela al mișcării staționare bidimensionale, în domenii infinite, de-a lungul unor pereți plani [45]. Această problemă este de fapt aceea a comportării asimptotice pentru $\nu \to 0$ ($\mathscr{R}e \to \infty$) a diferenței dintre soluțiile ecuațiilor menționate [193].

Spre deosebire de ecuațiile Navier-Stokes, care, pentru $\mathscr{R}e$ mari, pot avea soluție neunică (datorită ramificării) și cu un caracter neregulat, ecuația lui Prandtl (§ 2.1) are o soluție unică și foarte netedă. Pe de altă parte, ecuația lui Prandtl își pierde calitatea de model pentru mișcarea fluidului dincolo de punctul de separație (adică pentru gradienți adverși de presiune). De aceea, este de așteptat să putem compara soluțiile celor două tipuri de ecuații numai dacă acele soluții satisfac anumite condiții de mărginire (și anume pentru derivatele tangențiale ale vitezelor și forțelor viscoase), iar gradientul presiunii este nepozitiv. Aceasta revine la a considera soluția din anumite clase S' și nu orice soluții ale ecuațiilor lui Prandtl și Navier-Stokes. Dacă M este constantă de mărginire și dacă $-b \leqslant p_x \leqslant -a$ $(a, b > 0)$, atunci clasa S este determinată de M, a și b. O analiză foarte detaliată a acestor lucruri poate fi găsită în [45], [130].

Cele două teoreme de mai jos vor indica faptul că într-un strat de grosime $\mathscr{R}e^{-\frac{1}{2}}$ aproximația lui Prandtl pentru ecuațiile Navier-Stokes este asimptotic valabilă la $\mathscr{R}e \to \infty$. Prima teoremă va trata cazul continuării stratului limită, iar cea de-a doua, cazul mișcării simetrice. Bara va fi pusă deasupra soluției lui Prandtl ca să o deosebim de soluția ecuațiilor Navier-Stokes nebarată.

Definim funcțiile u, v, p pe $\mathscr{D}\{0 \leqslant x \leqslant 3,\ 0 \leqslant y \leqslant 2\}$ și spunem că mișcarea caracterizată de u, v, p, $\mathscr{R}e$ aparține clasei S_M dacă: I) $0 \leqslant u \leqslant 1$ (am adimensionalizat cu marginea superioară a componentei după axa Ox a vitezei); II) Derivatele în raport cu x ale lui u și v pînă la ordinul doi sînt mărginite în valoare absolută de constanta M; III) $|\mathscr{R}e^{-1}(u_{xx} + u_{yy})|, |\mathscr{R}e^{-1}(v_{xx} + v_{yy})| \leqslant M$; IV) $|\mathscr{R}e^{-1}(v_{xx} + v_{yy})_x| \leqslant M$.

Fie o mișcare caracterizată de u, v, p, $\mathscr{R}e$ care satisface ecuațiile Navier-Stokes, condițiile la limită $u(x, 0) = v(x, 0) = 0$ aparțin clasei S_M, în $\mathscr{D}$ au loc inegalitățile

$$-b \leqslant p_x(x, y) \leqslant -a, \tag{2.4.1}$$

pe frontiera $\partial\mathscr{D}$ avem $u \geqslant 0$ iar, în plus, în secțiunea $x = 1$, se dă $\varphi(\eta) = u(1, \eta)$, $\eta = y\mathscr{R}e^{\frac{1}{2}}$. Pentru o astfel de mișcare se pot stabili în $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant \mathscr{R}e^{-\frac{1}{2}}$, folosind în principal principiul maximului (Anexa 1), atît mărginiri *a priori* pentru u cît și următoarele inegalități $\varphi(\eta) \leqslant 1$, $|\varphi'(\eta)| \leqslant M$, $C_1 g(\eta) \leqslant \varphi(\eta) \leqslant C_2 g(\eta)$, unde $g(x) = \begin{cases} 2x - x^2, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & x \geqslant 1, \end{cases}$ $C_1 = 0{,}1\ a\sqrt{\max\{M, \sqrt{a/8}\}}$, $C_2 = \frac{8}{3}\sqrt{\frac{3b}{4} + M + 2}$. Vom defini acum două

funcţii $\bar{\varphi}(\eta)$ şi $\overline{p'(x)}$ cu proprietăţi analoage celor ale lui φ şi p_x, care diferă puţin de acestea şi care permit demonstrarea unei teoreme de existenţă a unei mişcări Prandtl care are $\bar{\varphi}(\eta) = \bar{u}(1, \eta)$ şi pe $\overline{p'(x)}$ drept gradient de presiune.

Fie, deci, $\bar{\varphi}(\eta)$ o funcţie definită pe $0 \leqslant \eta < \infty$ astfel încît $\bar{\varphi}(0) = 0$, $\overline{\varphi'(0)} > 0$; $\bar{\varphi}(\eta) > 0$ pentru $\eta > 0$, $\overline{\varphi(\eta)} \leqslant 1$, $|\overline{\varphi'(\eta)}| \leqslant M$, $C_1 g(\eta) \leqslant \bar{\varphi} \leqslant C_2 g(\eta)$; $\bar{\varphi}(\eta)$ are derivate (pînă la ordinul doi) Hölder continue, $\bar{\varphi}(\infty) < \infty$; pentru orice $\eta \leqslant \mathscr{R}e^{\frac{1}{2}}$ avem

$$|\bar{\varphi}(\eta) - \varphi(\eta)| \leqslant A\, \mathscr{R}e^{-\frac{1}{2}} \min\{\eta, 1\} \tag{2.4.2}$$

unde A este o constantă astfel încît $A \geqslant (4 + 4b)/15$. Să mai considerăm funcţia $\overline{p'(x)}$ pe $1 \leqslant x \leqslant 2$ avînd derivate Hölder continue şi astfel încît $-b \leqslant \overline{p'(x)} \leqslant -a$,

$$|\overline{p'(x)} - p_x(x, 0)| \leqslant A\, \mathscr{R}e^{-\frac{1}{2}},\ \overline{\varphi''(\eta)} - \overline{p'}(0) = O(\eta^2) \tag{2.4.3}$$

pentru $\eta \to 0$. În aceste condiţii există (teorema 2.1.4) o curgere Prandtl $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{p}$, $\mathscr{R}e$ care are drept viteză în secţiunea iniţială pe $\overline{\varphi(\eta)}$ iar drept gradient de presiune pe $\overline{p'(x)}$.

TEOREMA 2.4.1. *Fie, pentru M, a, b date, curgerea din clasa S_M caracterizată de $u, v, p, \mathscr{R}e$ care satisface ecuaţiile Navier-Stokes, condiţia (2.4.1) şi celelalte proprietăţi de mai sus. Să notăm cu $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \mathscr{R}e$ mişcarea lui Prandtl definită mai sus. Atunci există constantele K_1 şi K_2 care depind, prin intermediul lui M, a, b, doar de curgerea dată şi, prin intermediul lui A, de gradul în care profilul iniţial de viteză $\bar{u}(1, y)$ aproximează pe $u(1, y)$ iar $\overline{p'(x)}$ aproximează pe $p_x(x, 0)$, astfel încît pentru $1 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant \mathscr{R}e^{-\frac{1}{2}}$,* avem

$$|u(x, y) - \bar{u}(x, y)| \leqslant K_1 \mathscr{R}e^{-\frac{1}{2}}. \tag{2.4.4}$$

În plus, frecările la perete $\tau(x) = \mathscr{R}e^{-1} u_y(x, 0)$, $\bar{\tau}(x) = \mathscr{R}e^{-1} \bar{u}_y(x, 0)$ corespunzătoare curgerii Navier-Stokes şi respectiv curgerii Prandtl satisfac inegalitatea

$$|\tau(x) - \bar{\tau}(x)| \leqslant K_2\ \mathscr{R}e^{-1}. \tag{2.4.5}$$

Demonstraţia acestei teoreme se bazează pe cîteva leme care dau mărginiri pentru u şi $w(x, \psi)$, unde w este funcţia lui von Mises, $u^2(x, \eta) = w(x, \psi)$ iar ψ este funcţia de curent astfel încît $u = w_\eta$. Argumentele folosite de leme sînt principiul maximului şi diferite relaţii integrale care leagă pe w de η şi pe $\psi(1, \eta)$ de $\varphi(\eta)$. Pentru a obţine (2.4.5) se ţine seama de mărginiri pentru $|w(x, \psi) - \bar{w}(x, \psi)|$ şi se aplică teorema de medie.

Teorema 2.4.1 stabileşte că într-o regiune apropiată de corp, dacă în secţiunea de intrare diferenţa dintre viteza din mişcarea Navier-Stokes şi cea corespunzătoare ecuaţiei lui Prandtl şi de asemenea diferenţa dintre gradienţii de presiune corespunzători admit mărginiri de ordinul lui $\mathscr{R}e^{-\frac{1}{2}}$,

Scanned with OKEN Scanner

atunci ordinul acestei mărginiri se păstrează pentru toată acea regiune iar pentru diferența dintre rezistențele la înaintare, ordinul mărginirii este $\mathcal{R}e^{-1}$. Ordinul mărginirii se poate mări dacă în loc de clasa S_M considerăm mișcări din clasa S_M^*. Spunem că o mișcare $u, v, p, \mathcal{R}e$ definită pe $\mathcal{D}$ este din clasa S_M^* (unde $M > 0$) dacă: 1) $0 \leqslant u \leqslant 1$; 2) Derivatele lui u pînă la ordinul patru în raport cu x sînt fiecare mărginite în valoare absolută de M; 3) $|\mathcal{R}e^{-1}(u_{xx} + u_{yy})|$, $|\mathcal{R}e^{-1}(u_{xx} + u_{yy})_x|$, $|(\mathcal{R}e^{-1}(u_{xx} + u_{yy})_{xx}| \leqslant M$. Înlocuind pe $\mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}}$ cu $\mathcal{R}e^{-1}$ în diferența din (2.4.2) și (2.4.3), atunci în clasa S_M^* avem mărginirile (2.4.4) și (2.4.5), în care însă $\mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}}$ și $\mathcal{R}e^{-1}$ sînt înlocuite respectiv cu $\mathcal{R}e^{-1}$ și $\mathcal{R}e^{-\frac{3}{2}}$.

Rezultate similare se obțin în regiunea de lîngă punctul de stagnare care este punctul de pe frontieră în care, u și p_x se anulează. Pentru aceasta se definește clasa $S'_M \subset S_M$ a mișcărilor pentru care $|u_{xxx}|$, $|v_{xxx}| \leqslant M$ și $\mathcal{R}e^{-1}|(v_{xx} + v_{yy})_{xx}|$, $|\mathcal{R}e^{-1}(u_{xx} + u_{yy})_x| \leqslant M$.

Fie o mișcare $u, v, p, \mathcal{R}e$ din S'_M care satisface ecuațiile Navier-Stokes și condițiile $u(0, \eta) = u(x, 0) = v(x, 0) = 0$ și $-b_1 x \leqslant p_x(x, \eta) \leqslant -a_1 x$.

Fie o mișcare $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \mathcal{R}e$ a lui Prandtl corespunzătoare funcției $\overline{p'(x)}$ definită în $0 \leqslant x \leqslant 2$ și avînd derivatele Hölder continue care satisfac relațiile $-b_1 x \leqslant \overline{p'(x)} \leqslant -a_1 x$, $|p^{-1}(x) - p_x(x, 0)| \leqslant A \cdot \mathcal{R}e^{-1}$. Teorema 2.1.2 asigură existența unei soluții a lui Prandtl $\bar{u}, \bar{v}, \bar{p}, \mathcal{R}e$ astfel încît $\bar{u}(0, \eta) = \bar{u}(x, 0) = \bar{v}(x, 0) = 0$ și are $\overline{p'(x)}$ drept gradient de presiune.

TEOREMA 2.4.2. *Fie $u, v, p, \mathcal{R}e$ și $\bar{u}$ de mai sus. Există atunci constantele $K_1 K_2$ ce depind doar de M, a_1, b_1 și A astfel încît*

$$|u(x, y) - \bar{u}(x, y)| \leqslant K_1 \mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}}, \tag{2.4.4)'}$$

pentru $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant \mathcal{R}e^{-\frac{1}{2}}$. În plus, pentru $0 \leqslant x \leqslant 2$, avem

$$|\tau(x) - \bar{\tau}(x)| \leqslant K_2 \mathcal{R}e^{-1}. \tag{2.4.5)'}$$

Prima lucrare care studiază legătura dintre soluțiile ecuațiilor Navier-Stokes și cele ale ecuației lui Prandtl este [130], ea fiind continuată de [43], [44], [45]. În [130] ecuațiile Navier-Stokes sînt scrise ca sistem Prandtl plus termeni mici, întrebuințîndu-se apoi teoreme de comparație pentru ecuații parabolice (lema lui Nagumo-Westphal) [123], [228]. Acest procedeu va fi folosit în toate lucrările ulterioare asupra subiectului de care ne ocupăm. Spre deosebire de [45], [44], [43], în care fluidul se mișcă într-un plan în prezența unei frontiere, în [130] mișcarea are loc într-un canal mărginit de doi pereți paraleli iar presiunea în sistemul Prandtl coincide, în coordonatele lui von Mises, deci pe liniile de curent, cu cea din sistemul Navier-Stokes. În [45], [44], [43] soluțiile sînt comparate punctual, căci se lucrează în spațiul fizic, pe cînd în [130], lucrîndu-se în coordonatele lui von Mises, mișcarea Navier-Stokes de pe o linie de curent este comparată cu mișcarea aproximativă a lui Prandtl de pe linia de curent corespunzătoare.

Teoremele 2.4.1 și 2.4.2 au fost demonstrate în [45] prin extinderea rezultatelor din [130], [43], [44]. Mărginiri *apriorice* pentru u în cazul pereților curbi, al mișcărilor și nestaționare a celor tridimensionale pe

Scanned with OKEN Scanner

pereți plani au fost deduse în [44]. În [44] s-a arătat că în cazul mișcării staționare bidimensionale și al pereților drepți în aval nu se poate genera strat limită dacă acolo gradientul de presiune este nenegativ și componenta normală a vitezei este pozitivă, sau, dacă este negativă, de valoare absolută mică. Aceasta justifică ipotezele asupra lui p_x și v din lemele pe baza cărora au fost deduse teoremele 2.4.1 și 2.4.2. Dacă gradientul de presiune este nenegativ și componenta normală a vitezei este pozitivă la perete, atunci, după o anumită distanță finită în aval [137], soluția sistemului Prandtl nu mai există. În [130] se specifică faptul că pentru $x \to \infty$ soluția lui Prandtl nu tinde către o valoare dată decît dacă în stratul limită presiunea este egală cu cea din ecuațiile Navier-Stokes.

Să observăm că analiza de mai sus nu privește decît componenta u a vitezei și nu și pe v. Aceasta se datorează dependenței ecuațiilor lui Prandtl de sistemul de coordonate, fapt care nu este valabil pentru ecuațiile Navier-Stokes sau Euler. De aceea, era de așteptat ca dependența soluției ecuațiilor lui Prandtl de sistemul de coordonate să dispară pentru $\nu \to 0$ cînd ea tinde către soluția ecuațiilor Navier-Stokes sau Euler.

Din teoremele de mai sus mai rezultă că deși am considerat o problemă la limită în domeniu infinit pentru ecuațiile lui Prandtl, totuși soluția lor tinde către o soluție a ecuațiilor Navier-Stokes doar într-un strat subțire de lîngă frontiera corpului și către cea a ecuațiilor lui Euler. Aceasta vine să unifice studiile aplicative în care ecuațiile lui Prandtl sînt luate doar pentru $y \in [0, \delta]$ și cele pur matematice în care $y \in [0, \infty)$.

Teorema 2.4.1 în clasa S_M^* a fost demonstrată [200] în cazul particular al mișcării lui Hamel în canale convergente, obținîndu-se coeficienți mai buni. Pe acest caz particular au fost date în plus estimări pentru diferența dintre presiunea corespunzătoare ecuațiilor Navier-Stokes și respectiv ecuațiilor lui Prandtl și pentru diferența dintre vitezele corespunzătoare în regiunea exterioară stratului limită. S-a găsit că în afara stratului limită există o zonă de „tranziție" în care nici ecuațiile lui Prandtl, nici cele ale lui Euler nu furnizează o aproximație asimptotică valabilă pînă la ordinul $\mathscr{R}e^{-1}$. Mai departe de ea există o zonă în care soluția ecuațiilor lui Euler aproximează soluția ecuațiilor Navier-Stokes mai bine decît o face soluția ecuațiilor lui Prandtl. Desigur, ca și în teorema 2.4.1, soluția ecuațiilor lui Prandtl aproximează mai bine soluția ecuațiilor Navier-Stokes într-un strat de lîngă perete de grosime de ordinul $\mathscr{R}e^{-\frac{1}{2}}$. În acest fel este întregit tabloul comparației soluțiilor ecuațiilor Navier-Stokes cu cele ale diferitelor sale aproximații (Prandtl și Euler).

§ 2.5. Stabilitatea soluțiilor

Spunem că o soluție a problemei (2.1.1) — (2.1.6) este stabilă față de perturbații ale datelor, dacă perturbații inițiale ((la $t = t_0$) mici ale acestor date corespunzătoare soluției implică variații mici la $t > t_0$ ale soluțiilor corespunzătoare datelor perturbate. Dacă, în plus, pentru $t \to \infty$ orice soluție corespunzătoare unor date apropiate de cele corespunzătoare soluției date tinde către soluția dată, atunci acea soluție se numește asimptotic stabilă.

a) Vom considera mai întîi cazul cînd mișcarea perturbată, ca și soluția a cărei stabilitate o cercetăm, satisfac ecuația lui Prandtl.

Scanned with OKEN Scanner

Din demonstrația teoremei 2.1.7 se poate deduce următoarea teoremă de stabilitate asimptotică a mișcărilor axial simetrice în stratul limită față de perturbații ale lui U, v_0 și r; $r(x, y)$ desemnează frontiera corpului de revoluție.

TEOREMA 2.5.1. *Fie datele U, v_0, r și respectiv $\tilde{U}$, $\tilde{v}_0$, $\tilde{r}$ corespunzătoare soluțiilor u și $\tilde{u}$ ale problemei* (2.1.1), (2.1.2), (2.1.3) — (2.1.6). *Dacă*

$$U - \tilde{U},\ U_x - \tilde{U}_x,\ U^{-1}U_t - \tilde{U}^{-1}\tilde{U}_t,\ v_0 - \tilde{v}_0,\ Ur^{-1}r_x - \tilde{U}\tilde{r}^{-1} - \tilde{r}_x \tag{2.5.1}$$

sînt zero pentru $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, $t_0 = const. < \infty$, atunci în $\mathcal{D}_{X_1}$, pentru $0 \leqslant y \leqslant y_0 < \infty$, are loc inegalitatea $|uU^{-1} - \tilde{u}\tilde{U}^{-1}| \leqslant K_3\ e^{-\alpha t}$, unde α, $K_3 = const.$, > 0, K_3 depinde de y_0.

Dacă perturbarea datelor U, v_0 și r acționează tot timpul iar la $t \to \infty$ tinde la zero, atunci se poate arăta [146] că soluția perturbată nu părăsește un anumit cerc din jurul soluției date. Mai precis, folosind inegalități care au servit la demonstrarea teoremei 2.1.8, se poate deduce următoarea :

TEOREMA 2.5.2. *Dacă diferențele din* (2.5.1) *tind la zero pentru $t \to \infty$ uniform în $\mathcal{D}_{X_1}$, atunci, pentru orice $\delta > 0$, există o constantă $K(\delta)$ astfel încît în $\mathcal{D}_{X_1}$ avem*

$$|uU^{-1} - \bar{u}\bar{U}^{-1}| \leqslant \delta + K(\delta)e^{-\alpha t}.$$

Dacă perturbarea datelor U, v_0 și r acționează tot timpul dar astfel încît diferențele (2.5.1) să nu depășească o anumită valoare ε, atunci în mod analog se poate arăta că diferența soluțiilor corespunzătoare datelor ce intră în diferențele (2.5.1) nu depășește nici ea un multiplu de ε. Deci :

TEOREMA 2.5.3. *Să presupunem că diferențele* (2.5.1) *nu depășesc în modul o cantitate constantă $\varepsilon > 0$, iar datele u_0 și $\tilde{u}_0$ sînt astfel încît $|w - \tilde{w}||_{t=0} \leqslant \varepsilon$, unde $w = U^{-1}u_y$, $\tilde{w} = \tilde{U}^{-1}\tilde{u}_y$. Atunci în $\mathcal{D}_{X_1}$ avem $|uU^{-1} - \bar{u}\tilde{U}^{-1}| \leqslant K_4\,\varepsilon$, unde K_4 depinde de u, $\tilde{u}$ și de derivatele lui $\tilde{u}$.*

Să remarcăm că în teorema 2.5.3 au fost perturbate toate datele problemei (2.1.1) — (2.1.2)′, (2.1.3) — (2.1.6). În particular, viteza inițială u_0 a suferit și ea perturbații. În [140] se demonstrează dependența continuă a soluției problemei (2.1.1) — (2.1.6) de datele u_0, u_1, U, v_0, deci stabilitatea soluției acestei probleme față de perturbații ale condițiilor în secțiunea inițială, la momentul inițial, pe frontiera corpului și ale suflajului sau sucțiunii. Dacă datele u_1, u_0, U au limite pentru $t \to \infty$ atunci pentru $t \to \infty$ curentul nestaționar $u(t, x, y)$ tinde către curentul staționar $u(x, y)$, corespunzător datelor limită.

b) De obicei, în practică interesează în mod deosebit un alt tip de stabilitate și anume stabilitatea în sensul lui Liapunov a unei soluții a ecuației lui Prandtl care deci este soluție (apoximativă) a ecuațiilor Navier-Stokes la perturbații numai ale condițiilor inițiale, restul datelor rămînînd neperturbate, mișcarea perturbată satisfăcînd acum ecuațiile Navier-Stokes. Acest punct de vedere este mult mai apropiat de realitate și este singurul abordat în lucrările de hidrodinamică. Analiza stabilității soluției lui Blasius în stratul limită pe placa plană se găsește printre altele în [54], unde sînt citate și alte studii asupra stabilității altor soluții ale ecua-

Scanned with OKEN Scanner

ţiilor stratului limită. Aici menţionăm doar rezolvarea numerică cu ajutorul metodei diferenţelor finite a ecuaţiei Orr-Sommerfeld care guvernează stabilitatea liniară a mişcării în stratul limită.

§ 2.6. Estimarea erorilor în teoria lui Prandtl a stratului limită

Problema staţionară corespunzătoare lui (2.1.1) — (2.6.1) în coordonatele (ξ, η) ale lui von Mises se scrie :

$$M\varphi = \varphi\varphi_\xi - UU' - \varphi(\varphi\varphi_{\eta\eta} + \varphi_\eta^2) = 0, \tag{2.6.1}$$

$$\varphi(0, \eta) = \hat{\varphi}(\eta), \quad 0 < \eta < \infty, \tag{2.6.2}$$

$$\varphi(\xi, 0) = 0, \quad 0 \leqslant \xi \leqslant X \tag{2.6.3}$$

$$\lim_{\eta\to\infty} \varphi(\xi, \eta) = U(\xi), \quad 0 \leqslant \xi \leqslant X, \tag{2.6.4}$$

unde φ este transformata lui u prin transformarea lui von Mises, adică $u(x, y) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = \varphi(\xi, \eta)$. Să notăm $G = \{0 < \xi \leqslant X, 0 < \eta < \infty\}$; fie $\bar{G}$ închiderea lui G şi T, transformarea $(\xi, \eta) \to (\sigma, \tau)$, $\sigma = \xi$, $\tau = \eta(1 + \eta)^{-1}$. Vom presupune că datele problemei satisfac următoarele proprietăţi : $U(\xi)$ este continuă pe $0 \leqslant \xi < X$; $U > 0$ şi U derivabilă pe $(0, X]$; $\hat{\varphi}(\eta)$ este de două ori derivabilă pe $(0, \infty)$ iar $\hat{\varphi} > 0$; $\hat{\varphi}(\tau(1 - \tau)^{-1})$ este continuă pentru $0 \leqslant \tau \leqslant 1$; $\hat{\varphi}(0) = 0$ şi

$$\lim_{\tau\to 1-0} \hat{\varphi}(\tau(1 - \tau)^{-1}) = U(0). \tag{2.6.4}'$$

Spunem că funcţia $\omega(\xi, \eta)$ este admisibilă în $S \subset G$ dacă : $\omega > 0$, în S ; $\omega(\sigma, \tau(1 - \tau)^{-1})$ este continuă pe $\overline{TS}$; $\omega^2 \eta^{-1}$ este uniform mărginită în S ; ω_ξ, ω_η, $\omega_{\eta\eta}$ există în S şi există constantele $c_0 > 0$ şi c_1 astfel ca $\omega(\xi, \eta) \geqslant c_0 \sqrt{\eta} / (1 + \sqrt{\eta})$ şi $\omega(\omega_{\eta\eta} + \omega_\eta^2) \leqslant c_1$ în S. Funcţia $\tilde{\varphi}(\xi, \eta)$ se numeşte aproximaţie pentru problema (2.6.1) — (2.6.4) dacă este admisibilă în G şi satisface condiţiile (2.6.3) şi (2.6.4)'. Uneori $\tilde{\varphi}$ se numeşte soluţie aproximativă deşi ea nu satisface nici ecuaţia (2.6.1) şi nici condiţia (2.6.2) din secţiunea iniţială. Soluţia lui (2.6.1) — (2.6.4) este deci o funcţie admisibilă φ care satisface (2.6.1) şi (2.6.2).

Se poate demonstra [133] că

$$\underline{\omega}\ (\xi, \eta) \leqslant \varphi(\xi, \eta) \leqslant \bar{\omega}(\xi, \eta), \text{ pe } \bar{G}$$

unde $\underline{\omega}$ şi $\bar{\omega}$ sînt funcţii cunoscute de aproximaţia, de asemenea cunoscută, $\tilde{\varphi}$. Cu alte cuvinte se poate stabili evaluarea

$$\underline{\varepsilon}(\xi, \eta) \leqslant \varphi(\xi, \eta) - \tilde{\varphi}(\xi, \eta) \leqslant \bar{\varepsilon}(\xi, \eta) \text{ pe } \bar{G}. \tag{2.6.5}$$

Pentru aceasta se consideră $\bar{\omega}(\xi, \eta) = \tilde{\varphi}(\xi, \eta) + \varepsilon(\xi, \eta)$, unde $\tilde{\varphi}$ este o aproximaţie dată şi se caută ε astfel ca : 1) $\bar{\omega} \geqslant \varphi$ pe frontierele $\xi = 0$, $\eta = 0$ şi la $\eta \to \infty$ şi 2) $M\bar{\omega} \geqslant 0$ în G. Atunci, folosind lema lui Nagumo-Westphal, rezultă $\bar{\omega} \geqslant \varphi$ în tot $\bar{G}$; analog se poate

Scanned with OKEN Scanner

găsi $\omega \leqslant \varphi$ în $\bar{G}$. Deci, dacă alegînd o aproximație $\tilde{\varphi}$ reușim să satisfacem 1) și 2), atunci, folosind inegalități parabolice, găsim evaluări pentru eroarea $|\tilde{\varphi} - \varphi|$. În f[133] sînt date astfel de extimări nu numai pentru soluția φ (deci u), ci și pentru tensiunea tangențială la peretele $\eta = 0$, pentru grosimea de deplasare a stratului limită, pentru grosimea de pierdere de impuls și pentru grosimea de pierdere de energie. Un rezultat tipic este

TEOREMA 2.6.1. *Fie* $U'(\xi) \geqslant 0$ *pe* $0 \leqslant \xi \leqslant X$; $\tilde{\varphi}(\xi, \eta)$ *o aproximație cu proprietatea* $\tilde{\varphi}_{\eta\eta} \leqslant 0$ *în* G, *satisfăcînd* (2.6.3) *și* (2.6.4). *Să presupunem că există o funcție* $\rho(\xi) \in C[0, X]$ *astfel ca* $|M\tilde{\varphi} / \tilde{\varphi}| \leqslant \rho(\xi)$ *în* G *și un număr real* ε_0 *astfel ca pentru* $\xi = 0$ *și* $0 < \eta < \infty$ *să avem* $|\hat{\varphi}(\eta) - \tilde{\varphi}(0, \eta)| \leqslant \varepsilon$. *Atunci, pentru orice soluție* $\varphi(\xi, \eta)$ *a lui* (2.6.1) — (2.6.4) — (2.6.4), *avem în* $\bar{G}$

$$|\varphi(\xi, \eta) - \tilde{\varphi}(\xi, \eta)| \leqslant \varepsilon(\xi) = \varepsilon_0 + \int_0^{\xi} \rho(t)\, dt.$$

Remarcăm că pentru a construi mărginiri pentru eroarea $|\varphi - \tilde{\varphi}|$ nu este necesar să știm pe $\tilde{\varphi}$, ci numai o margine ε_0 a lui $|\varphi - \tilde{\varphi}|$ la $\xi = 0$ (deci de fapt a lui $|\hat{\varphi}(\eta) - \tilde{\varphi}(0, \eta)|$) și o margine $\rho(\xi)$ a erorii reziduale relative $|M\tilde{\varphi}/\tilde{\varphi}|$. Deci teorema 2.6.1 rămîne valabilă pentru o clasă întreagă de aproximații care corespund lui ε_0 și δ. De asemenea, notăm faptul că eroarea ε este compusă din eroarea ε_0 din secțiunea inițială $\xi = 0$ și din integrala $\int_0^{\xi} \rho(t)dt$ din marginea erorii reziduale. Dacă $\varepsilon_0 \to 0$ și $\rho \to 0$, atunci $\varepsilon \to 0$ și deci $\tilde{\varphi} \to \varphi$. Teorema 2.6.1 dă astfel și unicitatea lui φ și dependența continuă a lui φ de valoarea inițială $\hat{\varphi}(\eta)$. În plus, dacă: a) $\lim_{n\to\infty} M\tilde{\varphi}_n = 0$ în G și b) $\lim_{n\to\infty} \tilde{\varphi}_n(0, \eta) = \tilde{\varphi}(\eta)$ în $0 < \eta < \infty$, atunci $\tilde{\varphi}_n \to \varphi$; cu alte cuvinte, în condițiile a) și b) putem construi pe φ cu ajutorul șirului $\{\tilde{\varphi}_n\}$ de aproximații cunoscute.

Teorema 2.6.1 cere gradienți favorabili de presiune ($U' \geqslant 0$) și profile transformate convexe ($\tilde{\varphi}_{\eta\eta} \leqslant 0$). Se pot demonstra teoreme analoage fără aceste restricții. În acest sens dăm mai jos o teoremă care o conține pe cea de mai sus drept caz particular:

TEOREMA 2.6.2. *Fie* $\psi(\eta) \in C^1[0, \infty \cap C^2(0, \infty)$ *și* $\psi > 0$ *în* $0 < \eta < \infty$. *Fie* $\tilde{\varphi}(\xi, \eta)$ *o aproximație în* G. *Să presupunem că există două funcții* $\underline{\rho}(\xi)$ *și* $\bar{\rho}(\xi) \in C[0, X]$, *astfel încît* $\underline{\rho}(\xi) \leqslant -\underline{M}\tilde{\varphi}/(\tilde{\varphi}\psi) \leqslant \bar{\rho}(\xi)$ *în* G *și două numere reale* $\underline{\varepsilon}_0 \leqslant 0 \leqslant \bar{\varepsilon}_0$ *astfel ca pentru* $\xi = 0$ *și* $0 < \eta < \infty$ *să avem* $\underline{\varepsilon}_0 \psi(\eta) \leqslant \hat{\varphi}(\eta) - \tilde{\varphi}(0, \eta) \leqslant \bar{\varepsilon}_0 \psi(\eta)$. *Să mai presupunem că există două funcții* $\underline{\alpha}(\xi)$, $\bar{\alpha}(\xi) \in C[0, X]$ *astfel ca*

$$(2.6.6) \qquad -U(U^-)_+/\tilde{\varphi}^2 - U(U')/\tilde{\varphi}(\tilde{\varphi} + \underline{\varepsilon}_1\psi) + \tilde{\varphi}\psi''/\psi + 2\tilde{\varphi}_\eta\psi'/\psi + \tilde{\varphi}_{\eta\eta} + \varepsilon_1(\psi'' + \psi'^2/\psi)_- \leqslant \underline{\alpha}(\xi)$$

$$(2.6.7.) \qquad -U(U')_+/\tilde{\varphi}(\tilde{\varphi} + \bar{\varepsilon}_1\psi) - U(U')_-/\tilde{\varphi}^2 + \tilde{\varphi}\psi''/\psi + 2\tilde{\varphi}_\eta\psi'/\psi + \tilde{\varphi}_{\eta\eta} + \bar{\varepsilon}_1(\psi'' + \psi'^2/\psi)_+ \leqslant \bar{\alpha}(\xi),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ε_1 și $\bar{\varepsilon}_1$ sînt reale și $\varepsilon_1 < 0 < \bar{\varepsilon}$ iar $(A)_+ = \max\ (0, A)$, $(A)_- = \min(0, A)$. Să definim $\underline{\varepsilon}(\xi) = \underline{A}(\xi)\left[\varepsilon_0 + \int_0^\xi \underline{\rho}(t)\,\underline{A}^{-1}(t)\,dt\right]$,

$$\bar{\varepsilon}(\xi) = \bar{A}(\xi)\left[\bar{\varepsilon}_0 + \int_0^\xi \bar{\rho}(t)\bar{A}^{-1}(t)\,dt\right], A(\xi) = \exp\int_0^\xi \underline{\alpha}(t)\,dt, \bar{A}(\xi) =$$

$$= \exp\int_0^\xi \bar{\alpha}(t)\,dt.$$

Atunci pe $\bar{G}$ avem

$$\underline{\varepsilon}(\xi)\,\psi(\eta) \leqslant \varphi(\xi, \eta) - \bar{\varphi}(\xi, \eta) \leqslant \bar{\varepsilon}(\xi)\,\psi(\eta).$$

Estimările lui $|\varphi - \bar{\varphi}|$ au fost făcute în planul (ξ, η). Deoarece transformarea lui von Mises depinde de profilul de viteză, din (2.6.5) obținem în planul fizic doar estimarea

$$\bar{u}(x, \underline{y}) - \varepsilon(x) \leqslant u(x, y) \leqslant \bar{u}(x, \bar{y}) + \varepsilon(x),$$

unde, în general, $\underline{y} \neq \bar{y}$.

Evaluări ale erorilor soluțiilor problemei (2.6.1) — (2.6.4) pot fi găsite, de asemenea, în [129] și în [199] (unde drept aproximație se iau soluțiile similare).

CAPITOLUL III

O FORMULARE INTEGRO-DIFERENȚIALĂ A UNOR ECUAȚII NELINIARE CU DERIVATE PARȚIALE DE ORDIN DOI DE TIP DIFUZIV

§ 3.1. Extinderi ale modelului lui Prandtl

Modelul original al lui Prandtl se referă la curgerea bidimensională, incompresibilă, staționară și a fost intensiv studiat în literatură. Capitolele anterioare ale acestei cărți prezintă sistematic rezultatele obținute în această direcție.

Necesitatea determinării caracteristicilor medii (frecare, transfer, grosime, punct de desprindere) ale stratului limită fiind extrem de acute pentru scopuri tehnice, modelul de strat limită s-a extins considerabil, fără a mai beneficia de un studiu matematic riguros. Prandtl însuși a extins în 1945 acest model doar la curgerea tridimensională, staționară, incompresibilă.

În acest paragraf vom prezenta o schemă a problematicii stratului limită sub aspect practic remarcînd totodată că problemele matematice atașate sînt departe de a fi complet rezolvate. Aceasta ar presupune demonstrarea existenței, unicității, stabilității, comportării asimptotice a soluției precum și algoritme constructive (convergență de calcul).

Însăși punerea problemei matematice implică următoarele : alegerea sistemului de coordonate adecvat, includerea forțelor exterioare specifice cazului tratat (magnetice, electrice, Coriolis etc.) ; prescrierea condițiilor la limită ; precizarea naturii curgerii (laminar, tranzițional, turbulent sau mixt) ; alegerea termenilor preponderenți din ecuațiile Navier-Stokes și deci scrierea ecuațiilor de tip strat limită ; adoptarea unor legi semiempirice pentru curgerile turbulente sau adăugarea unor ecuații suplimentare pentru închiderea sistemului de ecuații.

Problema matematică odată pusă, este apoi necesară construirea soluției ei ; în majoritatea cazurilor se va renunța la analiza calitativă mai sus menționată. De aceea, rezultatele matematice vor fi considerate ca bune dacă concordă cu cele experimentale.

Cazurile ce se pot ivi se deduc combinînd caracteristicile curgerii considerate din tabelul nr. 3.1.1. Rezultă $2^{11} = 2048$ cazuri luînd drept bază cazul generic al stratului limită după coloana din stînga (model Prandtl).

Aceste cazuri se multiplică dacă ținem seama de includerea în această categorie a curgerilor de tip dîră (sau jet) precum și de utilizarea concomitentă a mai multor metode pentru același caz. S-a ajuns astfel la un număr impresionant de lucrări consacrate „stratului limită" cu o rată anuală de creștere exponențială [12].

Scanned with OKEN Scanner

Varietatea mare a acestor probleme conduce și la o mare varietate de metode de soluționare practică, rezultate din alegerea variabilelor independente, formulării diferențiale sau integro-diferențiale etc. arătate de altfel în § 1.3.

Tabelul nr. 3.1.1

Nr. crt.	Model Prandtl	Cazuri de extindere
1	corp fix	corp în rotație [222]
2	staționar	nestaționar
3	bidimensional	tridimensional
4	izoterm	neizoterm
5	newtonian	ne newtonian
6	fără cîmpuri externe de forță	în cîmpuri externe de forță [222]
		multicomponent [32]
7	monocomponent	compresibil
8	incompresibil	turbulent [160]
9	laminar	pereți curbi
10	pereți plani	condiții la limită speciale [10]
11	condițiile la limită obișnuite	

În acest sens formularea integro-diferențială prezintă un caracter de metodă incluzînd toate curgerile în care determinant este gradientul transversal $\frac{\partial}{\partial \beta}$. Spre ilustrare scriem ecuațiile unei curgeri tridimensionale, compresibile, în coordonate curbilinii ortogonale sub forma [3]

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(H_1H_3\tau_{\alpha\beta}) + \tau_{\alpha\beta}\frac{H_1H_2H_3}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta} = \rho H_1H_2H_3\left[\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{H_1}\frac{\partial u}{\partial \alpha} + \right.$$

$$\left. + \frac{v}{H_2}\frac{\partial u}{\partial \beta} + \frac{w}{H_3}\frac{\partial u}{\partial \gamma} + \frac{uv}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial \beta} + \frac{uw}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial \gamma} - \frac{v^2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} - \frac{w^2}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \alpha}\right] +$$

$$+ H_2H_3\frac{\partial p}{\partial \alpha} - H_1H_2H_3F_\alpha - \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2H_3\tau_{\alpha\alpha}) - \frac{\partial}{\partial \gamma}(H_1H_2\tau_{\gamma\alpha}) -$$

$$- \tau_{\gamma\gamma}\frac{H_1H_2H_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial \gamma} + \tau_{\beta\beta}\frac{H_1H_2H_3}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \tau_{\gamma\gamma}\frac{H_1H_2H_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \alpha},$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(H_1H_3\tau_{\beta\gamma}) + \tau_{\beta\gamma}\frac{H_1H_2H_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \beta} = \rho H_1H_2H_3\left[\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{H_1}\frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{v}{H_2}\frac{\partial w}{\partial \beta} + \right.$$

$$\left. + \frac{w}{H_3}\frac{\partial w}{\partial \tau} + \frac{wu}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \alpha} + \frac{wv}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \beta} - \frac{u^2}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial \gamma} - \frac{v^2}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial \gamma}\right] +$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+ H_1H_2\frac{\partial p}{\partial \gamma} - H_1H_2H_3F_\gamma - \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2H_3\tau_{\gamma\alpha}) - \frac{\partial}{\partial \gamma}(H_1H_2\tau_{\gamma\gamma}) -$$

$$- \tau_{\gamma\alpha}\frac{H_1H_2H_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_3}{\partial \alpha} + \tau_{\alpha\alpha}\frac{H_1H_2H_3}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial \gamma} + \tau_{\beta\beta}\frac{H_1H_2H_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial \gamma},$$

$$-\frac{\partial p}{\partial \beta} = \rho\left[H_2\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{H_2}{H_1}u\frac{\partial v}{\partial \alpha} + v\frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{H_2}{H_3}w\frac{\partial v}{\partial \gamma} + wu\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} +\right.$$

$$\left. + vw\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial \gamma} - \frac{u^2}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial \beta} - \frac{w^2}{H_3}\frac{\partial H_3}{\gamma\beta} - H_2\frac{1}{\rho}(\nabla\cdot\tau)_\beta - H_2\frac{\beta}{\rho}\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}\left(H_1H_3k\frac{1}{H_2}\frac{\partial T}{\partial \beta}\right) = H_1H_2H_3\left[\rho\frac{\partial(c_pT)}{\partial t} + \rho u\frac{1}{H_1}\frac{\partial(c_pT)}{\partial \alpha} +\right.$$

(3.1.1)

$$\left. + \rho v\frac{\partial(c_pT)}{\partial \beta} + \rho w\frac{1}{H_1}\frac{\partial(c_pT)}{\partial \gamma} - \frac{\partial p}{\partial t} - \frac{u}{H_1}\frac{\partial p}{\partial \alpha} - \frac{v}{H_2}\frac{\partial p}{\partial \beta} - \frac{w}{H_3}\frac{\partial p}{\partial \gamma} -\right.$$

$$\left. - \tau : (\nabla\vec{v}) - \mathcal{W}\right] - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(H_2H_3\frac{k}{H_1}\frac{\partial T}{\partial \alpha}\right) - \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(H_1H_2\frac{k}{H_3}\frac{\partial T}{\partial \gamma}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta}(H_1H_3\rho v) = -H_1H_2H_3\frac{\partial \rho}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \alpha}(H_2H_3\rho u) - \frac{\partial}{\partial \gamma}(H_1H_2\rho w),$$

cu condițiile la limită

$$\beta = 0,\ u = U_0,\quad v = V_0,\quad w = W_0\ ,$$

(3.2.2)

$$\beta = \delta(\alpha, \gamma, t),\quad u = U_e,\quad w = W_e,\quad \frac{\partial u}{\partial \beta} = q_{U_e},\quad \frac{\partial w}{\partial \beta} = q_{W_e}$$

$$\tau_{\alpha\beta} = \frac{\mu}{H_1H_2}\left[H_2^2\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{v}{H_2}\right) + H_1^2\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{u}{H_1}\right)\right],$$

$$\tau_{\alpha\gamma} = \frac{\mu}{H_3H_1}\left[H_1^2\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{u}{H_1}\right) + H_3^2\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{w}{H_3}\right)\right],$$

$$\tau_{\beta\gamma} = \frac{\mu}{H_2H_3}\left[H_3^2\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{w}{H_3}\right) + H_2^2\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{v}{H_2}\right)\right],$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\tau_{\alpha\alpha} = 2\mu\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u}{H_1}\right)+\frac{1}{H_1}(\vec{V}\nabla_q)H_1\right]-\frac{2}{3}\mu\nabla_q\vec{V}$$

$$\tau_{\beta\beta} = 2\mu\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v}{H_2}\right)+\frac{1}{H_2}(\vec{V}\nabla_q)H_2\right]-\frac{2}{3}\mu\nabla_q\vec{V}$$

$$\tau_{\gamma\gamma} = 2\mu\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{w}{H_3}\right)+\frac{1}{H_3}(\vec{V}\nabla_q)H_3\right]-\frac{2}{3}\mu\nabla_q\vec{V}$$

$$\tau:(\nabla\vec{V}) = \tau_{\alpha\alpha}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{u}{H_1}\right)+\frac{1}{H_1}(\vec{V}\nabla_q)H_1\right]+\tau_{\beta\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{v}{H_2}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{H_2}(\vec{V}\nabla_q)H_2\right]+\tau_{\gamma\gamma}\left[\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{w}{H_3}\right)+\frac{1}{H_3}(\vec{V}\nabla_q)H_3\right]+\tau_{\alpha\beta}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial\beta}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{H_1}\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{v}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}-\frac{u}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}\right)+\frac{\tau_{\alpha\gamma}}{H_3H_1}\left[H_1^2\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{u}{H_1}\right)+\right.$$

$$\left.+H_3^2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{w}{H_3}\right)\right]+\tau_{\beta\gamma}\frac{1}{H_2H_3}\left[H_3^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{w}{H_3}\right)+H_2^2\frac{\partial}{\partial\gamma}\left(\frac{v}{H_2}\right)\right],$$

$$(\nabla\cdot\tau)_\beta=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2H_3\tau_{\alpha\beta})+\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1H_3\tau_{\beta\beta})+\frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1H_2\tau_{\beta\gamma})\right]+$$

$$+\tau_{\alpha\beta}\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}+\tau_{\beta\gamma}\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}-\tau_{\alpha\alpha}\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\beta}-\tau_{\gamma\gamma}\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_3}{\partial\beta},$$

$$(\vec{V}\cdot\Delta_q = \frac{u}{H_1}\frac{\partial}{\partial\alpha}+\frac{v}{H_2}\frac{\partial}{\partial\beta}+\frac{w}{H_3}\frac{\partial}{\partial\gamma},\quad \nabla_q\cdot\vec{V} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial\alpha}(H_2H_3u)+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial\beta}(H_1H_3v)+\frac{\partial}{\partial\gamma}(H_1H_2w)\right].$$

Observăm că utilizînd ecuațiile de continuitate, pentru $\rho = \text{const.}$, ecuația pentru u se mai poate pune sub forma

$$\rho H_1H_2H_3\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_1}(\rho U^2-\tau_{\alpha\alpha})\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_2}(\rho uv-\tau_{\alpha\beta})\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_3}(\rho wu-\tau_{\gamma\alpha})\right]+H_3\frac{\partial H_1}{\partial\beta}(\rho uv-\tau_{\alpha\beta})+H_2\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}(\rho uw-$$

$$-\tau_{\gamma\alpha})-H_3\frac{\partial H_2}{\partial\alpha}(\rho v^2-\tau_{\beta\beta})-H_2\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}(\rho w^2-\tau_{\gamma\gamma})+\frac{H_1H_2H_3}{H_1}\frac{\partial p}{\partial\alpha}-$$

$$-H_1H_2H_3F_\alpha=0.$$

Scanned with OKEN Scanner

Analog avem pentru w:

$$\rho H_1H_2H_3\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\alpha}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_1}(\rho uw-\tau_{\gamma\alpha})\right]+\frac{\partial}{\partial\beta}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_2}(\rho vw-\tau_{\beta\gamma})\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_3}(\rho w^2-\tau_{\gamma\gamma})\right]+H_2\frac{\partial H_3}{\partial\alpha}(\rho wu-\tau_{\gamma\alpha})+H_1\frac{\partial H_3}{\partial\beta}(\rho wv-$$

$$-\tau_{\beta\gamma})-H_2\frac{\partial H_1}{\partial\gamma}(\rho u^2-\tau_{\alpha\alpha})-H_1\frac{\partial H_2}{\partial\gamma}(\rho v^2-\tau_{\beta\beta})+$$

$$+\frac{H_1H_2H_3}{H_3}\frac{\partial p}{\partial\gamma}-H_1H_2H_3F_\gamma=0$$

Punînd în mod obișnuit

$$u=U+u',\ v=V+v',\ w=W+w',\ \text{cu}\ \overline{u}=U,\ \overline{v}=V,$$

$$\overline{w}=W,\ \overline{uv}=UV+\overline{u'v'},\ \overline{vw}=VW+\overline{v'w'},$$

$$\overline{wu}=WU+\overline{w'u'}$$

obținem de exemplu

$$\rho\overline{uv}-\overline{\tau}_{\alpha\beta}=\rho UV+\rho\overline{u'v'}-\overline{\tau}_{\alpha\beta}=\rho UV-\tau'_{\alpha\beta}$$

astfel că

$$\tau'_{\alpha\beta}=\overline{\tau}_{\alpha\beta}-\rho\overline{u'v'}=\frac{\mu}{H_1H_2}\left[H_2^2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{V}{H_2}\right)+H_1^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{U}{H_1}\right)\right]-\rho\overline{u'v'}$$

De asemenea putem scrie

$$\tau'_{\alpha\beta}=\frac{\mu_f}{H_1H_2}\left[H_2^2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{V}{H_2}\right)+H_1^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{U}{H_1}\right)\right]$$

astfel că

$$\mu_f=\mu\left[1-\frac{\overline{u'v'}}{\nu}\frac{H_1H_2}{H_2^2\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{V}{H_2}\right)+H_1^2\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{H_1}\right)}\right],$$

ceea ce deschide perspectiva abordării curgerilor cu fluctuații.

Scanned with OKEN Scanner

Remarcăm că introducerea acestei „viscozități" datorită fluctuațiilor de tip Boussinesq nu schimbă simetria ecuațiilor puse sub forma (3.1.1). Acestea admit următoarea formulă generală

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(D_f \frac{\partial A}{\partial y}\right) = \Sigma f_i(A, A_x, A_{xx} \ldots)$$

care pune în lumină *transferul* după y al mărimii A, transportată după x de curentul principal U.

Scopul scrierii ecuației sub această formă este tocmai de a prezenta metoda dezvoltată de autori pentru studiul fenomenelor din curgerile de tip strat limită, descrise de un sistem de ecuații neliniare cu derivate parțiale de ordinul doi.

Curgerea din apropierea pereților este cea mai reprezentativă și mai studiată configurație care aparține acestei categorii de mișcări, dat fiind importanța tehnică a acesteia. Datorită proprietăților fizice specifice date de condițiile de aderență la perete, de continuitate a fluidului și de gradienții importanți după normala la perete, acest tip de mișcare este caracterizat prin distribuții de viteză, temperatură, concentrație, după normala la perete, care alcătuiesc respectiv familii de profile de viteză, temperatură, concentrație. Aceste distribuții pentru un moment t_1 și o poziție (x_1, z_1) date, sînt reprezentate prin funcții continui, mărginite și uniforme în raport cu y. În aceste condiții, sub acțiunea forțelor vîscoase și inerțiale, curgerea se dezvoltă între două suprafețe limită: una cunoscută (peretele), indicată prin $y = 0$ și una arbitrară (suprafața de la exteriorul stratului limită), indicată prin $y = \delta(x, z, t)$; iar cîmpul de viteze $\vec{V}(x, y, z, t) = \vec{V}_p + \vec{V}_s$ se poate despărți într-o curgere principală $\vec{V}_p = u\vec{i} + w\vec{k}$, paralelă cu peretele și cu gradienți mari după normală: $\frac{\partial \vec{V}_p}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial C}{\partial y}$, și o curgere secundară $\vec{V}_s = v\vec{j}$, cu $\|v\| << \|\vec{V}_p\|$.

Pentru exemplificare vom considera o curgere incompresibilă, laminară cu transfer simultan de impuls, de masă și căldură, avînd caracteristicile fizice ρ, μ, C_p, k, C, și $\mathcal{D}_{AB}$ constante [17], unde k și c sînt respectiv conductibilitatea termică și densitatea molară a fluidului.

Modelul matematic al acestei curgeri este reprezentat de soluțiile ecuațiilor Navier-Stokes, energiei și continuității pentru specia A care difuzează, scrise ca

$$(\vec{V}_p)_{yy} = \mathcal{R}e_T \vec{V}_{pt} + \mathcal{R}e[(\vec{V}\nabla)\vec{V}_p + \nabla p - \vec{F}_p] - (\vec{V}_p)_{xx} - (\vec{V}_p)_{zz},$$

$$p_y = -\mathcal{R}e_T/\mathcal{R}e v_t - (\vec{V}\nabla)v + \frac{1}{\mathcal{R}e}\Delta v + F_s,$$

(3.1.3)

$$v_y = -u_x - w_z,$$

$$T_{yy} = \mathcal{R}e_T \mathcal{P}r T_t + \mathcal{R}e\mathcal{P}r[(\vec{V}\nabla)T] - 2\mathcal{P}rE[(\nabla u)^2 + (\nabla v)^2 + (\nabla w)^2] +$$

$$+ \mathcal{P}rE(\text{rot}\,\vec{V})^2 - T_{xx} - T_{zz}$$

$$C^A_{yy} = \mathcal{R}e_T \delta_c C^A_t + \mathcal{R}e\delta_c[(\vec{V}\nabla)C^A] - C^A_{xx} - C^A_{zz}$$

Scanned with OKEN Scanner

în care $\nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y}$; $\Delta = \nabla^2$; $v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \ldots$; $\vec{F} = \vec{F}_p + jF_s$

este o forță exterioară, $\mathcal{R}e = V_r L/\nu$, $\mathcal{R}e_T = L^2/\nu T_r$, $\mathcal{P}r = \frac{C_p\mu}{k} = \frac{\nu}{\alpha}$, $E = \frac{V_r^2}{C_p(\Delta T)_0}$, $\delta_c = \frac{\nu}{\mathcal{D}_{AB}}$, T_r este un timp de referință, V_r este o viteză de referință și L este o lungime de referință, iar α și $\mathcal{D}_{AB}$ sînt respectiv coeficienții de difuzie termică și masică.

Condițiile la limită asociate sînt:

$$\vec{V} = \vec{V}_0(x, z, t)\,;\ p = p_0(x, z, t),\ T = T_0(x, z, t),$$

$$C^A = C_0^A(x, z)\,;\ \vec{N}_B = \vec{N}_{BO}(x, z) = \rho_{BO}\vec{V}_{BO} \quad \text{la} \quad y = 0$$

în care $C^A = \rho_A/\rho$ este fracțiunea masică a speciei A;

$$\vec{V}_p = \vec{V}_{p_e}(x, z, t)\,;\frac{\partial}{\partial y}\left(p + \frac{v^2}{2}\right) = q_{p_e}(x, z, t) \text{ la } y = \delta_v(x, z, t)$$

$$\vec{\lambda}\frac{\partial V_p}{\partial y} = q_{v_e}(x, z, t),\ \vec{\lambda} = \text{vector constant};$$

$$T = T_e(x, z, t)\,;\frac{\partial T}{\partial y} = q_{T_e}(x, z, t) \text{ la } y = \delta_T(x, z, t)$$

și

$$C^A = C_e^A(x, z, t)\,;\frac{\partial C^A}{\partial y} = q_{c_e}(x, z, t) \text{ la } y = \delta_c(x, z, t).$$

În plus, trebuie specificate condițiile inițiale (la $t = 0$). Configurațiile de curgeri care aparțin tipului de curgere la perete pot fi încadrate în trei grupe:

— curgeri mărginite: curgerile dezvoltate în canale și conducte, curgerea dintre cilindrii în rotație etc.

— curgeri semimărginite: curgerile în strat limită, curgerea în straturi sau plane înclinate, curgerea în pelicule subțiri,substratul viscos, jetul la perete etc.

— curgeri libere: curgerile dezvoltate în jet și dîră, curgerea dezvoltată între doi curenți adiacenți etc.

Toate aceste sisteme pot prezenta situații mai complexe în care pe lîngă transferul de impuls intervin probleme de difuzie termică și masică. Sistemul de ecuații de mai sus descrie o asemenea mișcare generată prin difuzie mixtă de presiune, de căldură și de masă.

Ne-am referit la problema difuziei numai în sisteme nereactive, întrucît procesele chimice nu modifică structura ecuațiilor diferențiale cu derivate parțiale, care formează obiectul acestui capitol.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3.2. Transformări de coordonate și ecuațiile transformate

Pentru rezolvarea problemelor inițiale și la limită din paragraful precedent, vom folosi metoda lui Săvulescu. Pentru aceasta vom introduce transformarea de coordonate

$$\begin{cases} \xi = x; \ \eta_e = \int_0^y \tau(u, v, w, T, c)\mathrm{d}y' / \int_0^s (u, v, w, T, c)\mathrm{d}y' = \psi/\psi_\delta, \\ \zeta = z, \quad \tau = t, \end{cases}$$

(3.2.1)

cu $\psi_\delta \neq 0$, $\tau > 0$, care generalizează pe cea din § 1.3; proprietățile acestei transformări sînt analoge celor ale lui von Mises și Săvulescu-Ferrari. În particular, și aici η variază într-un domeniu mărginit spre deosebire de y din spațiul fizic, (ceea ce are o deosebită importanță numerică). Pentru aceasta trimitem la Spalding [150]). Deci $\xi, \zeta \in (0, \infty)$, $\eta \in [0, 1]$, $\tau \in [0, \infty)$; iacobianul transformării este și aici egal cu η_y.

Din (3.2.1) se deduc imediat următoarele relații $\eta_x = -\eta_y y_\xi$; $\eta_z = -\eta_y y_\zeta$; $\eta_t = -\eta_y y_\tau$; $\eta_y = \dfrac{1}{y_\eta} = \dfrac{\varphi}{\psi_\delta}$, cu ajutorul cărora se poate demonstra că (Oy este o diferențială totală exactă și că) avem transformarea inversă

$$x = \xi, \ y = \psi_\delta \int_0^\eta \varphi^{-1}\mathrm{d}\eta', \ z = \zeta, \ t = \tau. \tag{3.2.1}'$$

Calcule simple dau

$$\nabla^* = \vec{i}\frac{\partial}{\partial\xi} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial\zeta} + (\nabla\eta)\frac{\partial}{\partial\eta}; \ \nabla = \vec{i}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} + 2\eta_x\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta} + 2\eta_z\frac{\partial^2}{\partial\zeta\partial\eta} + (\nabla\eta)^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \Delta\eta\frac{\partial}{\partial\eta};$$

în care

$$(\nabla\eta)^2\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \Delta\eta\frac{\partial}{\partial\eta} \equiv \eta_y\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\eta_y(1+y_\xi^2+y_\zeta^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\right] - \eta_y(y_{\xi\xi}+y_{\zeta\zeta})\frac{\partial}{\partial\eta}, \ \Delta = \nabla^2,$$

$$\frac{\mathrm{d}^*}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial\tau} + u\frac{\partial}{\partial\xi} + w\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial\eta}; \ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}\cdot\nabla,$$

$$\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}t} = -\eta_y(y_\tau + uy_\xi + wy_\zeta - v).$$

Scanned with OKEN Scanner

Folosind formulele de mai sus vom scrie acum sistemul de ecuații (3.1.3) și condițiile la limită în variabilele ξ, η, ζ, τ. Toate mărimile care apar sînt adimensionalizate corespunzător cu V_r, T_r, L, $(T_\infty - T_0)$, $(C_\infty^A - C_0^A)$ și ρV_r^2 pentru presiune.

Ecuațiile Navier-Stocks transformate

$$[\varphi_u Du]_{\eta_u} = -\mathscr{R}e\,\psi_{\delta_u}\left[\psi_{\delta_u}\int_0^{\eta_u}\frac{u}{\varphi_u}\,\mathrm{d}\eta'_u\right]_\xi u_{\eta_u} + \mathscr{R}e\,\psi_{\delta_u} y_{\eta_u}\left(p+\frac{u^2}{2}\right)_\xi -$$

$$-\mathscr{R}e\,\psi_{\delta_u} y_\xi p_{\tau_u} + \mathscr{R}e_T\psi_{\delta_u}(y_{\eta_u}u_\tau - y_\tau u_{\eta_u}) + \mathscr{R}e\,\psi_{\delta_u}\Big(wy_{\eta_u}u_\zeta -$$

(3.2.2)

$$-u_{\tau_u}\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^{\eta_u} wy_{\eta_u}\,\mathrm{d}\eta'_u\Big) + \psi_{\delta_u}(2y_\xi u_{\xi\eta_u} + y_{\xi\xi}u_{\eta_u} - y_{\eta_u}u_{\xi\xi} + 2y_\zeta u_{\zeta\eta_u} +$$

$$+y_{\zeta\zeta}u_{\eta_u} - y_{\eta_u}u_{\zeta\zeta}) + \mathscr{R}e\,\psi_{\delta_u}(v_0^* u_{\tau_u} + y_{\tau_u}F^{(x)}) \equiv f_{uB} + \sum_{i=1}^{\tau} fu_i,$$

$$[\varphi_w Dw_{\tau_w}]\eta_w = -\mathscr{R}e\,\psi_{\delta_w}\left[\psi_{\delta_w}\int_0^{\eta_w}\frac{u}{\varphi_w}\,\mathrm{d}\eta'_w\right]_\xi w_{\eta_w} + \mathscr{R}e\,\psi_{\delta_w} y_{\eta_w}\left(p+\frac{w^2}{2}\right)_\zeta -$$

$$-\mathscr{R}e\,\psi_{\delta_w} y_\zeta p_{\eta_w} + \mathscr{R}e_T\psi_{\delta_w}(y_{\eta_u}w_\tau - y_\tau w_{\eta_w}) + \mathscr{R}e\,\psi_{\delta_w}\Big(uy_{\eta_w}w_\xi -$$

$$-w_{\tau_w}\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^{\eta_u} wy_{\tau_w}\,\mathrm{d}\eta'_w\Big) + \psi_{\delta_w}(2y_\xi w_{\xi\tau_w} + y_{\xi\xi}w_{\tau_w} - y_{\eta_w}w_{\xi\xi} + 2w_{\zeta\eta_w}y_\zeta +$$

$$+y_{\zeta\zeta}w_{\tau_w} - y_{\tau_w}w_{\zeta\zeta}) + \mathscr{R}e\,\psi_{\delta_w}(v_0^* w_{\tau_w} + y_{\tau_w}F^{(z)}) \equiv f_{w_B} + \sum_{i=1}^{6} f_{w_i}$$

$$\left(p+\frac{v^2}{2}\right)_{\eta_v} = (uy_\xi + wy_\zeta)\,v_{\eta_v} - (uv_\xi + wv_\zeta)y_{\eta_v} - \frac{\mathscr{R}e_T}{\mathscr{R}e}(y_{\eta_v}v_\tau - y_\tau v_{\eta_v}) -$$

$$-y_{\eta_v}F^{(y)} + \frac{1}{\mathscr{R}e}(\eta_{vy}Dv_{\eta_v})_{\eta_v} - \frac{1}{\mathscr{R}e}(2y_\xi v_{\xi\eta_v} + y_{\xi\xi}v_{\eta_v} - y_{\eta_v}v_{\xi\xi} +$$

$$+2y_\zeta v_{\zeta\eta_v} + y_{\zeta\zeta}v_{\eta_v} - y_{\eta_v}v_\xi) \equiv \sum_{i=1}^{6} f_{pi}$$

$$v_{\eta\varphi} = (uy_\xi + wy_\zeta)_{\eta\varphi} - (uy_{\eta_\varphi})_\xi - (wy_{\eta_\varphi})_\zeta \equiv \sum_{k=1}^{3} g_k$$

Scanned with OKEN Scanner

în care

$$D=1+y_\xi^2+y_\zeta^2;\ v_0^*=(v-uy_\xi+wy_\zeta)_{\eta=0};\ y_{\eta_u}=\frac{\psi\delta_u}{\varphi_u},\ y_{\eta_w}=\frac{\psi\delta_w}{\varphi_w},\ y_{\eta_v}=\frac{\psi\delta_v}{\varphi_v}$$

iar f_{u_B}, f_{u_i}, f_{w_B}, f_{w_i}, f_{p_i}, g_k se identifică succesiv din expresiile de mai sus.

Condiţiile la limită devin

$$u=u_0(\xi,\zeta,\tau),\quad v=v_0(\xi,\zeta,\tau),\quad w=w_0(\xi,\zeta,\tau),$$

$$p=p_0(\xi,\zeta,\tau)\ \text{la}\ \eta=0$$

şi

$$u=U_e(\xi,\zeta,\tau),\ w=W_e(\xi,\zeta,\tau),\ \frac{\partial}{\partial\eta_v}\left(p+\frac{v^2}{2}\right)=y_{\eta_v}q_{p_e}(\xi,\zeta,\tau),$$

$$\lambda_u\frac{\partial u}{\partial\eta_\varphi}+\lambda w\frac{\partial w}{\partial\eta_\varphi}=y_{\eta_e}q_{v_e}(\xi,\zeta,\tau),\ \psi_{\delta_\varphi}(\xi_0,\zeta_0,\tau)=\psi_{\delta_{\varphi\theta}}\ \text{la}\ \eta=1.$$

Ecuaţia transformată a energiei în funcţie de temperatura fluidului T, se scrie

$$[\varphi_T DT_{\eta_T}]_{\eta_T}=-\mathscr{R}e\mathscr{P}r\psi_{\delta_T}\left(\int_0^{\eta_T}y_{\eta_T}u\,d\eta_T'\right)_\xi T_{\eta_T}+\mathscr{R}e_T\mathscr{P}r\psi_{\delta_T}(y_{\eta_T}T_\tau-y_\tau T_{\eta_T})+$$

$$+\mathscr{R}e\psi_{\delta_T}\mathscr{P}r\left(wy_{\eta_T}T_\zeta-T_{\eta_T}\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^{\eta_T}y_{\eta_T}w\,d\eta_T'\right)+\psi_{\delta_T}(2y_\xi T_{\xi\eta_T}+$$

$$+y_{\xi\xi}T_{\eta_T}-y_{\eta_T}T_{\xi\xi}+2y_\zeta T_{\xi\eta_T}+y_{\zeta\zeta}T_{\eta_T}-y_{\eta_T}T_{\zeta\zeta})-$$

(3.2.3)

$$-\mathscr{P}rE\{2[(\nabla^*u)^2+(\nabla^*v)^2+(\nabla^*w)^2]-(\nabla^*\times\vec{V})^2\}+$$

$$+\mathscr{R}e\psi_{\delta_T}\mathscr{P}r(v_0^*T_{\eta_T}+uy_{\eta_T}T_\xi)\equiv f_{T_B}+\sum_{i=1}^{6}f_{T_i}$$

în care

$$y_{\eta_T}=\psi_{\delta_T}/\varphi_T.$$

Condiţiile la limită devin

$$T=T_0(\xi,\zeta,\tau)\ \text{pentru}\ \eta_T=0,\quad T=T_e(\xi,\zeta,\tau),\ \frac{\partial T}{\partial\eta_T}=y_{\eta_T}q_{T_e}(\xi,\zeta,\tau),$$

$$\psi_{\delta_T}(\xi_0,\zeta_0,\tau)=\psi_{\delta_{T_0}}\quad\text{pentru}\ \eta_T=1.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuația energiei cinetice $E = \rho/2(u^2 + v^2 + w^2) = \rho/2V^2$ scrisă sub forma

$$E_{vv} = \mathscr{R}e_T E_t + \mathscr{R}e[(\vec{V}\nabla)E + \nabla(p\vec{V}) + \vec{F}\cdot\vec{V}] +$$

$$+ [(\nabla u]^2 + (\nabla v)^2 + (\nabla w)^2] - E_{xx} - E_{zz}$$

poate fi transformată într-un mod similar ca mai sus astfel că se obține

$$[\tau_E D E_{\eta_E}]_{\eta_E} = -\mathscr{R}e\psi_{\delta_E}\left(\int_0^{\eta_E} y_{\eta_E} u \, \mathrm{d}\eta'_E\right)_\xi E_{\eta_E} + \mathscr{R}e_T\psi_{\delta_E}(y_{\eta_E}E_\tau - y_\tau E_{\eta_E}) +$$

$$+ \mathscr{R}e y_{\eta_E}\nabla^*(p\vec{v})\,\psi_{\delta_E} + \mathscr{R}e\psi_{\delta_E}\left[w y_{\eta_E}E_\zeta - E_{\eta_E}\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^{\eta_E} y_{\eta'_E} w \mathrm{d}\eta'_E\right] +$$

(2.3.4)

$$+ \psi_{\delta_E}(2y_\xi E_{\xi\eta_E} + y_{\xi\xi}E_{\eta_E} - y_{\eta_E}E_{\xi\xi} + 2y_\zeta E_{\zeta\eta_E} + y_{\zeta\zeta}E_{\eta_E} - y_{\eta_E}E_{\zeta\zeta}) +$$

$$+ \psi_{\delta_E} y_{\eta_E}[(\nabla^* u)^2 + (\nabla^* v)^2 + (\nabla^* \mathrm{w})^2] + \mathscr{R}e\psi_{\delta_E}[\tau_0^* E_{\eta_E} + u y_{\eta_E}E_\xi +$$

$$+ y_{\eta_E}\vec{F}\cdot\vec{V}] \equiv f_{E_B} + \sum_{i=1}^{6} f_{E_i},$$

cu condițiile la limită

$$E = E_0(\xi, \zeta, \tau), \text{pentru } \eta_E = 0,$$

$$E = E_e(\xi, \zeta, \tau), \frac{\partial E}{\partial \tau_{iE}} = y_{\eta_E} q_{E_e}(\xi, \zeta, \tau) \text{ pentru } \eta_E = 1.$$

Ecuația de continuitate pentru componentul A dintr-un amestec binar devine

$$[\varphi_C D C^A_{\eta_C}]_{\eta_C} = -\mathscr{R}e S_C\psi_{\delta_C}\left(\int_0^{\eta_C} y_{\eta'_C} u \, \mathrm{d}\eta'_C\right)_\xi C^A_{\eta_C} +$$

$$+ \mathscr{R}e_T S_C\psi_{\delta_C}(y_{\eta_C}C^A_\tau - y_\tau C^A_{\eta_T}) + \mathscr{R}e\psi_{\delta_C}S_C\left[w y_{\eta_C}C^A_\zeta -\right.$$

(3.2.5)

$$\left. - \left(\int_0^{\eta_C} y_{\eta'_C} w \, \mathrm{d}\eta'_C\right)_\zeta C^A_{\eta_C}\right] + \psi_{\delta_C}(2y_\xi C^A_{\xi\eta_C} + y_{\xi\xi}C^A_{\eta_C} - y_{\eta_C}C^A_{\xi\xi} +$$

$$+ 2y_\zeta C^A_{\zeta\eta_C} + y_{\zeta\zeta}C^A_{\eta_C} - y_{\eta_C}C^A_{\zeta\zeta}) + \mathscr{R}e\,\psi_{\delta_C}S_C(\tau_0^* C^A_{\eta_C} + u y_{\eta_C}C^A_\xi) \equiv f_{C_B} + \sum_{i=1}^{5} f_{C_i}$$

Scanned with OKEN Scanner

cu condițiile la limită

$$C^A = C_0^A(\xi,\ \zeta),\ \vec{N}_B = \vec{N}_{BC}(\xi,\ \zeta) \text{ la } \eta_C = 0,$$

$$C^A = C_e^A(\xi,\ \zeta,\ \tau),\ \frac{\partial C^A}{\partial \eta_C} = y_{\eta_C} q_{c_e}\ (\xi,\ \zeta,\ \tau) \text{ la } \eta_C = 1.$$

Folosind notațiile anterioare pentru diferiți termeni, sistemul (3.1.3) se poate scrie sub următoarea formă compactă

$$(\varphi_u D u_{\eta_u})_{\eta_u} = f_{u_B} + \sum_{i=1}^{6} f_{u_i},\quad f_{u_B} = -\mathscr{R}e\ \psi_{\delta_u}\left(\int_0^{\eta_u} y_{\eta'_u} u \mathrm{d}\eta'_u\right)_\xi u_{\eta_u},$$

$$(\varphi_w D w_{\eta_w})_{\eta_w} = f_{w_B} + \sum_{i=1}^{6} f_{w_i},\quad f_{w_B} = -\mathscr{R}e\ \psi_{\delta_w}\left(\int_0^{\eta_w} y_{\eta'_w} u \mathrm{d}\eta'_w\right)_\xi w_{\eta_w},$$

$$\left(p + \frac{v^2}{2}\right)_{\eta_v} = \sum_{i=1}^{6} f_{p_i};\quad v_{\eta_e} = \sum_{k=1}^{3} q_k,$$

$$(\varphi_T D T_{\eta_T})_{\eta_T} = f_{T_B} + \sum_{i=1}^{6} f_{T_i},\quad f_{T_B} = -\mathscr{R}e\,\mathscr{P}r\ \psi_{\delta_T}\left(\int_0^{\eta_T} y_{\eta'_T} u \mathrm{d}\eta'_T\right)_\xi T_{\eta_T},$$

$$(\varphi_C D C^A_{\eta_C})_{\eta_C} = f_{c_B} + \sum_{i=1}^{5} f_{c_i},\ f_{c_B} = -\mathscr{R}e\ S_C \psi_{\delta_C}\left(\int_0^{\eta_C} y_{\eta'_C} u \mathrm{d}\eta'_C\right)_\xi C^A_{\eta_C}.$$

Similar, ecuația energiei cinetice poate fi pusă sub forma

$$(\varphi_E D E_{\eta_E})_{\eta_E} = f_{E_B} + \sum_{i=1}^{6} f_{E_i},\quad f_{E_B} = -\mathscr{R}e\ \psi_{\delta_E}\left(\int_0^{\eta_E} y_{\eta'_E} u \mathrm{d}\eta'_E\right)_\xi E_{\eta_E}$$

Se remarcă faptul că aceste ecuații, fiecare reprezentînd un anumit proces de difuzie, au o structură matematică similară cu ecuația difuziei anizotrope

$$\frac{\partial}{\partial \eta_A}\left(\varphi_A D \frac{\partial A}{\partial \eta_A}\right) = \sum_{j=1}^{N} f_j,$$

A fiind mărimea transferabilă; acestei ecuații îi corespunde în planul fizic $\dfrac{\partial^2 A}{\partial y^2} = f_B + \sum_{i=1}^{N} f_i$, unde f_B este un termen principal și f_i termeni reprezentînd efecte secundare. Utilizarea acestei formulări diferențiale nu oferă avantaje speciale datorită complexității termenilor ei f_{u_i}, f_{w_i}, f_{p_i}, f_{T_i}, f_{c_i}, etc., a căror grupare și număr sînt arbitrare. Totuși, pentru tipul de curgeri considerat (curgeri la perete), această formulă repune în evidență anumiți termeni f_{u_B}, f_{w_B}, f_{T_B}, f_{c_B} care caracterizează curgerea principală și sugerează anumite simplificări confirmate de experiență.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3.3. Formularea integro-diferențială

În paragraful precedent, ca prim pas în metoda lui Săvulescu, ecuațiile care guvernează curgerile la perete au fost reduse prin transformarea (3.2.1) la forma

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\varphi_A D \frac{\partial A}{\partial \eta}\right) = f_{AB} + \sum_{i=1}^{N} f_{A_i}, \qquad \eta = \frac{\int_0^y \varphi_A \mathrm{d}y'}{\int_0^\delta \varphi_A \mathrm{d}y'}, \tag{3.3.1}$$

care trebuie rezolvată în condițiile

$$A = A_0(\xi, \zeta, \tau) \text{ la } \eta = 0,$$

și

$$A = A_e(\xi, \zeta, \tau), \frac{\partial A}{\partial \eta} = y_\eta q_{A_e}(\xi, \zeta, \tau) \text{ la } \eta = \delta_A(\xi, \zeta, \tau).$$

O a doua etapă, în aplicarea metodei menționate constă în reducerea acestei probleme la un sistem de ecuații integro-diferențiale cu ajutorul a două integrări ale ecuației (3.3.1) în raport cu η. Menționăm că ele sînt indicate de dependența puternică de η a caracteristicilor curgerii. Prima integrare între $\eta = 1$ și η dă

$$\varphi_A D \frac{\partial A}{\partial \eta} = \left(\varphi_A D \frac{\partial A}{\partial \eta}\right)_{\eta=1} + \int_1^\eta f_{A_B} \mathrm{d}\eta' + \sum_{i=1}^{N} \int_1^\eta f_{A_i} \mathrm{d}\eta' \tag{3.3.2}$$

cu o condiție suplimentară pentru $\eta = 0$

$$(\varphi_A D A_\eta)_{\eta=0} = (\varphi_A D A_\eta)_{\eta=1} - \int_0^1 f_{A_B} \mathrm{d}\eta - \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 f_{A_i} \mathrm{d}\eta. \tag{3.3.3}$$

A doua integrare între $\eta = 0$ și η dă

$$\int_0^\eta \varphi_A D A_{\eta'} \mathrm{d}\eta' = (\varphi_A D A_\eta)_{\eta=1}\eta + \int_0^\eta \left[\int_0^{\eta'} f_{A_B} \mathrm{d}\eta''\right] \mathrm{d}\eta' + \tag{3.3.4}$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \int_0^\eta \left[\int_1^{\eta'} f_{A_i} \mathrm{d}\eta''\right] \mathrm{d}\eta'$$

cu o condiție suplimentară pentru $\eta = 1$

$$\int_0^1 \varphi_A D A_\eta \mathrm{d}\eta = (\varphi_A D A_\eta)_{\eta=1} + \int_0^1 \left[\int_1^\eta f_{A_B} \mathrm{d}\eta'\right] \mathrm{d}\eta + \sum_{i=1}^{N} \int_0^1 \left[\int_1^\eta f_{A_i} \mathrm{d}\eta'\right] \mathrm{d}\eta. \tag{3.3.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

Ultimele două relații pot fi combinate liniar astfel că se obține o singură relație care cuprinde și condițiile la limită. Cu următoarele notații generale

$$(3.3.6)\quad F=\int_1^{\eta} f\mathrm{d}\eta';\quad F^{\oplus}=\int_0^{\eta} F\mathrm{d}\eta';\quad F_1^{\oplus}=\int_0^{1} F\mathrm{d}\eta;\quad f^{\oplus}=F^{\oplus}/F_1^{\oplus}$$

relația (3.3.4) se scrie sub forma

$$(3.3.7)\quad \int_0^{\eta}\varphi_A DA_{\eta'}\mathrm{d}\eta'=(\varphi_A DA_{\eta})_{\eta=1}\cdot\eta+F^{\oplus}_{A_{B1}}f^{\oplus}_{A_B}+\sum_{i=1}^{N}F^{\oplus}_{A_{i1}}f^{\oplus}_{A_i}.$$

Acum eliminarea lui $F^{\oplus}_{A_{B1}}$ prin substituirea valorii dată de (3.3.5) în relația (3.3.7) conduce în final la expresia

$$(3.3.8)\quad \int_0^{\eta}\varphi_A DA_{\eta'}\mathrm{d}\eta'=\int_0^{1}\varphi_A DA_{\eta}\mathrm{d}\eta\cdot f^{\oplus}_{A_B}+(\varphi_A DA_{\eta})_{\eta=1}(\eta-f^{\oplus}_{A_B})+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}F^{\oplus}_{A_{i1}}(f^{\oplus}_{A_i}-f^{\oplus}_{A_B})$$

care este o ecuație integro-diferențială pentru A, mărimea $A(\xi,\eta,\zeta,\tau)$ putînd fi, fie viteză, temperatură, energie cinetică sau concentrație, iar termenii $f_{A_B}(\xi,\eta,\zeta,\tau)$, $f_{A_i}(\xi,\eta,\zeta,\tau)$ fiind diverși termeni, implicați în ecuațiile transformate ale sistemului. Din punct de vedere fizic ecuația integro-diferențială pune în evidență două proprietăți legate de curgerile la perete: 1) satisfacerea condițiilor la limită prescrise și 2) o structură care cuprinde un termen principal $f^{\oplus}_{A_B}$ și o serie de termeni de forma $(f^{\oplus}_{A_i}-f^{\oplus}_{A_B})$, adică diferențe de mărimi asupra cărora s-a efectuat aceeași operație indicată prin simbolul $(\ )^{\oplus}$ și definită prin relațiile (3.3.6).

Necunoscutele problemei sînt acum $A(\xi,\eta,\zeta,\tau)$ și $\psi_{\delta_A}(\xi,\zeta,\tau)$, ele verificînd sistemul (3.3.4), (3.3.5) sau, echivalent, (3.3.5), (3.3.8). Cînd A se poate determina (aproximativ) din (3.3.4), atunci (3.3.5) este așa-numita ecuație a lui ψ_{δ_A}. Ea este ecuația cu derivate parțiale în raport cu ξ, ζ și τ de ordinul întîi în ψ_{δ_A} de forma

$$\frac{\partial\psi_{\delta_A}}{\partial\xi}+\frac{\partial\psi_{\delta_A}}{\partial\zeta}\frac{F^{\oplus}_{A_{\zeta 1}}}{F^{\oplus}_{A_{\xi 1}}}+\frac{\partial\psi_{\delta_A}}{\partial\tau}\frac{F^{\oplus}_{A_{\tau 1}}}{F^{\oplus}_{A_{\xi 1}}}+\frac{\sum_{i=1}^{N'}F^{\oplus}_{i_1}+(\varphi_A DA_{\eta})_{\eta=1}-\int_0^{1}\varphi_A DA_{\tau}\mathrm{d}\eta}{F^{\oplus}_{A_{\xi 1}}}=0$$

(3.3.9)

Grupul de ecuații (3.3.8), (3.3.9) reprezintă formularea integro-diferențială (FID) pentru problema matematică satisfăcută de A.

Scanned with OKEN Scanner

§ 3.4. Proprietățile operatorului integral

În acest paragraf vom scrie Tf în loc de $f^{\oplus}$, $T_1 f$ în loc de $F^{\oplus}$ și $T_2 f$ în loc de $F_1^{\oplus}$; după analiza proprietăților operatorului T, care apare în mod esențial în formularea integro-diferențială a problemei matematice a mișcării fluidelor vîscoase în stratul limită, vom da criterii pentru ca o funcție f dintr-o anumită clasă să aibă Tf foarte apropiată de $T1$, unde 1 este funcția unitate. Se confirmă astfel conjectura lui Săvulescu după care într-o mulțime arbitrară de funcții elementare, probabilitatea de a exista funcții cu această proprietate este mult mai mare decît aceea de a exista funcții fără această proprietate.

3.4.1. Punerea problemei

Fie următoarea problemă la limită și cu valori inițiale care generează pe cele din §3.3, în necunoscuta $A(x, y, z, t)$, de două ori continuu diferențiabilă în x, y, z pe R_+, $(0, \delta)$, R și odată diferențiabilă în t pe R_+

$$\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = f_B\left(A, \frac{\partial A}{\partial t}, \frac{\partial A}{\partial x}, \frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial z}, \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 A}{\partial z \partial y}, \right.$$

(3.4.1)

$$\left. \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 A}{\partial x \partial z}\right) + \sum_{i=1}^{N} f_i(\ldots),$$

pentru $(x, y, z, t) \in R_+ \times (0, \delta) \times R \times R_+$.

(3.4.2) $A(x, y, z, 0) = A_1(x, y, z)$ pentru $(x, y, z) \in R_+ \times (0, \delta) \times R$,

(3.4.3)
$$\left.\begin{aligned} A(x, 0, z, t) &= A_0(x, z, t) \\ A(x, \delta, z, t) &= A_e(x, z, t) \end{aligned}\right\} (x, z, t) \in R_+ \times R \times R_+,$$
$$A(0, y, z, t) = A_2(y, z, t) \text{ pentru } (y, z, t) \in (0, \delta) \times R \times R_+,$$

(3.4.4) $\frac{\partial A}{\partial y}(x, \delta, z, t) = Q_e(x, z, t)$ pentru $(x, z, t) \in R_+ \times R \times R_+$

pentru $\delta(0, z, t) = \delta_0(z, t), \delta(x, z, 0) = \delta_1(x, z)(z, t) \in R \times R_+, (x, z) \in R_+ \times R$, și cu condiția de compatibilitate $\delta_0(z, 0) = \delta_1(0, z)$ unde $y = \delta(x, z, t)$ este o hipersuprafață necunoscută, f_B este termenul de bază iar f_i, care depind de aceleași variabile ca și f_B, sînt mici perturbații. Funcțiile f_B și f_i nu sînt *a priori* cunoscute, ci este cunoscută doar suma lor $f_B + f_i$. Despărțirea în f_B și f_i este dictată de experiență.

Fie transformarea $(x, y, z, t) \mapsto (\xi, \eta, \zeta, \tau)$, unde $\xi = x$, $\zeta = z$, $\tau = t$,

(3.4.5)
$$\eta = \frac{\int_0^y \varphi(A)\, dy'}{\int_0^{\delta} \varphi(A(y'))\, dy'},$$

iar φ este o funcţie dată de A. Diverse φ corespund diferitelor transformări de coordonate. Impunem condiţia ca iacobianul

$$D(\xi, \eta, \zeta, \tau)/D(x, y, z, t) = \frac{\partial \eta}{\partial y}$$

să fie nenul. Trecînd la noile coordonate, integrînd ecuaţia obţinută mai întîi între 1 şi η şi apoi între 0 şi η şi ţinînd seama de condiţiile la limită obţinem ecuaţiile integro-diferenţiale în necunoscutele A şi ψ_δ :

$$(3.4.6)\quad A(\eta)\varphi(\eta) = A_e\varphi(A_e)\,(Tf_B)(\eta) + A_e\varphi(A_0)\,[1 - (Tf_B)(\eta)] +$$

$$+ Q_e\psi_\delta(\eta)\,[\eta - (Tf_B)(\eta)] + \sum_{i=1}^{N} (T_2 f_i)\,(Tf_i - Tf_B)(\eta) +$$

$$+ \int_0^\eta A(\eta')\frac{\partial\varphi(\eta')}{\partial\eta'}\,d\eta' - (Tf_B(\eta)\int_0^1 A(\eta')\frac{\partial\varphi(\eta')}{\partial\eta'}\,d\eta',\ \eta \in (0, 1),$$

$$(3.4.7)\quad A_e\varphi(A_e) = A_0\varphi(A_0) + \int_0^1 A(\eta')\frac{\partial\varphi(\eta')}{\partial\eta'}\,d\eta' + Q_e\psi_\delta + T_2 f_B + \sum_{i=1}^{N} T_2 f_i$$

unde am notat $\psi_\delta = \int_0^\delta \varphi(A(y'))\,dy'$; la aceste ecuaţii se mai adaugă condiţia (3.4.2) şi condiţia iniţială în φ_δ care rezultă din condiţia (3.4.4). Cu T am notat următorul operator neliniar integral

$$(3.4.8)\quad T : \mathscr{D}(T) \subset C\,[0, 1] \to \mathscr{R}(T) \subset C^2\,[0, 1],$$

$$(Tf)(\eta) = \frac{\int_0^\eta\int_1^{\eta'} f(\eta'')\,d\eta''\,d\eta'}{\int_0^1\int_1^{\eta'} f(\eta'')\,d\eta''\,d\eta'},$$

care se mai poate scrie drept cît de operatori liniari $Tf = \dfrac{T_1 f}{T_2 f}$, unde

$$(T_1 f)(\eta) = \int_0^\eta\int_1^{\eta'} f(\eta'')\,d\eta''\,d\eta',\ T_2 = T_3|_{\mathscr{D}(T_3)\setminus \mathrm{Ker}\,T_3},\ (T_3 f)(\eta) =$$

$$= \int_0^1\int_1^{\eta'} f(\eta'')\,d\eta''\,d\eta',\ T_1(\text{resp. } T_2) : C\,[0, 1]\setminus \mathrm{Ker}\ T_3 \to$$

$$\to C^2\,[0, 1]\,(\text{resp. } R),\ T_3 : C\,[0, 1] \to R.$$

În cazul particular cînd în loc de ecuaţia (3.4.1) avem ecuaţia lui Prandtl pentru transformarea lui Săvulescu-Ferrari [168], corespunzătoare lui

Scanned with OKEN Scanner

$\varphi = 1$ (funcția identitate) și cînd $A = U(x, y)$, $Q_e = 0$, $A_0 = 0$, obținem din (3.4.6), notînd $U_a = UU_e^{-1}$,

$$U_a^2 = T\left(\eta \frac{\partial U_a}{\partial \eta}\right) + 2\sum_{i=1}^{N} (T_2 f_i)\left[Tf_i - T\left(\eta \frac{\partial U_e}{\partial \eta}\right)\right], \tag{3.4.9}$$

U_a fiind componenta adimensională după x a vitezei.

Investigarea numerică a transformatelor a sute de funcții [168], [169] a condus pe Săvulescu la concluzia că într-o mulțime arbitrară de funcții elementare, marea majoritate a funcțiilor au proprietatea

$$\rho[Tf, T1] \equiv \max_{\eta \in [0,1]} |(Tf)(\eta) - (T1)(\eta)| \leqslant \varepsilon < 1, \tag{3.4.10}$$

deci operatorul T, pe lîngă că netezește funcțiile, le transformă în funcții apropiate de transformata $(T1)(\eta) = \eta(2 - \eta)$ a funcției constante egală cu 1. Acest fapt i-a sugerat folosirea unei metode de aproximații succesive în rezolvarea ecuației (3.4.9), prima aproximație fiind

$$(U_a^2)_1 \simeq T\left(\eta \frac{\partial U_a}{\partial \eta}\right) \simeq \eta(2 - \eta),$$

deci $(U_a)_1 = \sqrt{\eta(2-\eta)}$. Să observăm totuși că nu există nici o asigurare că punctele fixe ale operatorului (3.4.9) pot fi obținute prin acest procedeu De aceea, Săvulescu propune ca o primă etapă în studiul lui T caracterizarea mulțimii $C_{TT}[0, 1]$, a funcțiilor, numite de Săvulescu tipic transformabile, care au proprietatea exprimată de egalitatea (3.4.10). Se vede că C_{TT} este mulțimea funcțiilor ale căror imagini prin T se află în sfera $\mathscr{B}(\eta(2 - \eta); \varepsilon)$ de rază ε cu centrul în $\eta(2 - \eta)$. Deoarece, așa cum se va vedea mai departe, T este un operator continuu, mulțimea C_{TT} este un deschis din $C[0, 1]$ și anume imaginea inversă prin T a lui $\mathscr{B}(\eta(2 - \eta); \varepsilon)$ deci $C_{TT} = T^{-1}(\mathscr{B}(\eta(2 - \eta); \varepsilon) \cap \mathscr{R}(T))$.

Se cere, deci, o teoremă de reprezentare a funcțiilor din $T^{-1}(\mathscr{B}(\eta(2 - \eta); \varepsilon) \cap \mathscr{R}(T))$. În cele de mai jos vom da doar condiții suficiente de apartenență la C_{TT}.

3.4.2. Proprietățile operatorului T

Domeniul de definiție $\mathscr{D}(T)$ al operatorului T este

$$\mathscr{D}(T) = C[0, 1] \setminus \operatorname{Ker} T_3, \tag{3.4.11}$$

deci este format din mulțimea funcțiilor continue pe $[0, 1]$ din care scădem acele funcții $\bar{f}$ care anulează numitorul din (3.4.8).

Exemple de funcții care nu aparțin lui $\mathscr{D}(T)$: $\bar{f}_1 = 0$ (funcția identic nulă); $\bar{f}_2 = \eta^k - \dfrac{l+2}{k+2}\eta^l$ $(k, l \in R - \{2\})$; $\bar{f}_3 = \cos 2k\pi\eta$ $(k \in Z)$. Ținînd

seama că operatorul T poate fi scris și sub forma

$$(3.4.8') \qquad (Tf)(\eta) = \frac{\eta\int_1^\eta f(\eta')\,d\eta' - \int_0^\eta \eta' f(\eta')\,d\eta'}{-\int_0^1 \eta f(\eta)\,d\eta},$$

rezultă că pentru ca o funcție să nu aparțină lui $\mathcal{D}(T)$, este necesar și suficient ca

$$(3.4.12) \qquad \int_0^1 (\eta f)^+ d\eta = \int_0^1 (\eta f)^- d\eta,$$

adică aria determinată de funcția $(\eta f)^+$ să fie egală cu cea determinată de funcția $(\eta f)^-$. În particular, exemplele de mai sus satisfac această condiție.

Mulțimea $\mathcal{D}(T)$ nu poate fi organizată ca spațiu liniar căci $0 \notin \mathcal{D}(T)$; pe de altă parte $\mathcal{D}(T)$ nu este închisă față de operația de adunare. De exemplu, dacă $f \leqslant \mathcal{D}(T)$, atunci $-f \in \mathcal{D}(T)$ dar suma lor, care este tocmai funcția nulă, nu aparține lui $\mathcal{D}(T)$. Mulțimea $\mathcal{D}(T)$ este deschisă în topologia generată de metrica ρ a lui Cebîșev. În adevăr, funcționala T_3 este continuă și deci imaginea inversă prin T_3 a mulțimii închise formată din numărul zero este o mulțime închisă și aceasta este tocmai Ker T_3. Rezultă că $\mathcal{D}(T)$ este deschisă, fiind complementara față de spațiul total $C[0, 1]$ a unei mulțimi închise (Ker T_3). Ker T_3 este spațiu liniar.

Mulțimea $\mathcal{R}(T)$ a valorilor lui T. Să notăm cu r funcțiile din $\mathcal{R}(T)$ și fie f preimaginea lor prin T, adică $Tf = r$. Avem

$$\text{a) } r(0) = 0,\ \text{b) } r(1) = 1,\ \text{c) } \frac{dr}{d\eta}\Big|_{\eta=1} = 0,\ \text{d) } f(\eta) = \frac{d^2 r}{d\eta^2} \cdot \int_0^1 \int_1^{\eta'} f(\eta'')\,d\eta''\,d\eta'.$$

Din proprietățile a) și b) rezultă că: 1° nici o funcție constantă nu aparține lui $\mathcal{R}(T)$. În particular, $0 \notin \mathcal{R}(T)$. Dacă $f \in \mathcal{D}(T) \Rightarrow \alpha f \in \mathcal{D}(T)$, $\forall \alpha \in R \setminus \{0\}$. Deci dacă $f \in \mathcal{D}(T)$, atunci $\mathcal{D}(T)$ conține întreaga rază αf. Această proprietate nu este valabilă pentru $\mathcal{R}(T)$ căci dacă $r \in \mathcal{R}(T)$ atunci $(\forall)\ r' = \alpha r$ cu α diferit de zero sau unu avem $(\alpha r)(1) \neq 1$, deci nu este îndeplinită proprietatea b). Cu alte cuvinte: 2° singura funcție r' de pe dreapta αr care aparține lui $\mathcal{R}(T)$ este cea pentru care $r(1) = 1$, altfel spus $\mathcal{D}(T)$ înțeapă pe $\mathcal{R}(T)$ cel mult într-un punct, căci mai trebuie ca $r'(0) = 0$ ori $\frac{dr'}{d\eta}\Big|_{\eta=1} = 0$; 3° Polinoamele de gradul întîi nu aparțin lui $\mathcal{R}(T)$, căci după proprietatea d), preimaginea lor ar fi funcția nulă care nu aparține lui $\mathcal{D}(T)$; 4° Cum $r(1) = 1$, urmează că toate funcțiile din $\mathcal{R}(T)$ se află în complementara sferei $B(0; 1)$ față de $C[0, 1]$, adică în afara sferei unitate centrată în origine. 5° $\mathcal{D}(T) \cap \mathcal{R}(T) \neq \emptyset$. În adevăr, $\sin \frac{\pi}{2}\eta \in \mathcal{D}(T) \cap \mathcal{R}(T)$. 6° $\mathcal{R}(T) \not\supset C^2[0, 1] \cap \mathcal{D}(T)$ căci funcțiile constante $r(\eta) = k$ și polinoamele $r(\eta) = 1 + a\eta (a \neq -3/2)$ sînt din $C^2[0, 1] \cap \mathcal{D}(T)$ dar nu și din $\mathcal{R}(T)$ (fig. 3.4.1). 7° $Tf_1 = Tf_2 \Leftrightarrow f_1 = \alpha f_2 (\alpha \in R \setminus \{0\})$. Implicația inversă este imediată căci $Tf_1 = T(\alpha f_2) = Tf_2$.

Fie acum $Tf_1 = Tf_2$. Din d) avem atunci $\frac{f_1(\eta)}{\int_0^1 \int_1^{\eta'} f_1(\eta'')\,d\eta''\,d\eta'} =$

$= \frac{f_2(\eta)}{\int_0^1 \int_1^{\eta'} f_2(\eta'')\,d\eta''\,d\eta'}$ dar numitorii sînt niște constante c_1 și c_2 deci

$\frac{f_1}{c_1} = \frac{f_2}{c_2}$ adică $f_1 = \frac{c_1}{c_2} f_2$ astfel că implicația directă rezultă notînd $c_1 c_2^{-1} = \alpha$.
Proprietatea 7° arată că o rază αf are ca imagine prin T un singur punct Tf și că acest punct provine doar din punctele razei αf. De asemenea mai

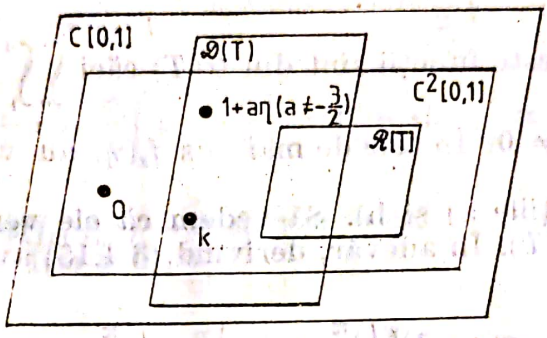


Fig. 3.4.1.

rezultă că eventualele puncte fixe ale lui T au $\|f\| = \max_{\eta \in [0,1]} |f(\eta) \geqslant 1|$ deci se găsesc pe coaja sferei unitate centrată în origine sau în afara acestei sfere. 8° $\mathscr{R}(T) \not\subset \mathscr{D}(T)$. De exemplu, funcțiile $a\eta^m + b\eta^n + c\eta^p$ cu $a = \frac{n}{n-m} - \frac{c(p-n)}{m-n}$; $b = \frac{m}{m-n} + \frac{c(p-m)}{m-n}$,

$c = -\frac{(m+n+2)(p+2)}{(m+2)(n+2) - (m+n+2-p)(p+2)}$ m, n, p reali, neegali între ei și neegali cu -2, aparțin lui $\mathscr{R}(T)$ dar nu și lui $\mathscr{D}(T)$, fiind din Ker T_3. Să observăm că numitorul lui c se anulează numai pentru $p = m$ sau $p = n$, ceea ce în ipotezele noastre nu se poate întîmpla. Deci operatorul T nu ne lasă în domeniul de definiție. În particular, funcția $r(\eta) = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3$, unde $a = -\frac{21}{2}$, $b = 24$, $c = \frac{-25}{2}$ este transformata lui $f(\eta) = 48 - 75\eta \in \mathscr{D}(T)$ și este din Ker T_3. Proprietatea 4° conduce la aceea că $C_{TT} = T^{-1}(\mathscr{B}(T_1; \varepsilon) \cap \mathscr{R}(T))$, unde $\mathscr{B}(T_1; \varepsilon) \cap \cap \mathscr{R}(T) \subset \mathbb{C}\mathscr{B}(0, 1)$.

Punctele fixe ale lui T sînt funcțiile $f(\eta)$ care satisfac a)—d), unde $r(\eta) = f(\eta)$ deci

$$\begin{cases} f(\eta) = f''(\eta) \int_0^1 \int_1^{\eta'} f(\eta'')\,d\eta''d\eta', \\ f(0) = 0,\ f(1) = 1; \end{cases} \tag{3.4.13}$$

notînd

$$\lambda = -\int_0^1 \int_1^{\eta'} f(\eta'')\,d\eta''d\eta', \tag{3.4.14}$$

soluția lui (3.4.13) este $f(\eta) = \sin\frac{\eta}{\sqrt{\lambda}}\sin^{-1}(\sqrt{\lambda})^{-1}$. Introducînd aceasta în ecuația (3.4.14), obținem $\lambda = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-2}$, $k \in Z$, adică punctele fixe sînt $f_k(\eta) = (-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\eta$. Cum însă $f_k(\eta) = f_{-(k+1)}(\eta)$ rezultă că singurele puncte fixe sînt

$$(3.4.15) \quad f_k(\eta) = (-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\eta, \qquad (k = 0,\ 1,\ 2\ \ldots)$$

Să observăm că aceste funcții sînt din $\mathscr{D}(T)$ căci $\int_0^1\int_1^{\eta'} f(\eta'')\,d\eta''\,d\eta' = -\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)^{-2} \neq 0$. În cele de mai sus $f_k(\eta)$ au verificat în problema (3.4.13) doar condițiile a) și b). Să vedem că ele verifică și condiția c) deci că sînt din $\mathscr{R}(T)$. În adevăr, derivînd (3.4.15) avem

$$\left.\frac{df_k}{d\eta}\right|_{\eta=1} = (-1)^k\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0.$$

1) Punctele fixe ale lui T se găsesc pe coaja sferei unitate centrată în origine deoarece $\max\limits_{\eta\in[0,1]} |f_k(\eta) - 0| = 1$.

2) Toate punctele fixe ale lui T se găsesc la distanța 2 de funcția 1 afară de punctul fix $f_0 = \sin\frac{\pi}{2}\eta$ care se găsește la distanța 1 de funcția 1. În adevăr,

$$\rho(1, f_0) = \max_{\eta[0,1]}\left|1 - \sin\frac{\pi}{2}\eta\right| = 1, \quad \text{(maximum este atins pentru } \eta = 0),$$

$$\forall k \in N,\ \rho(1, f_k) = \max_{\eta\in[0,1]}\left|1 - (-1)^k \sin\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right)\eta\right| = 2.$$

(pentru k par, maximum este atins în $\eta = \frac{3}{2k+1}$ iar pentru k impar în $\eta = \frac{1}{2k+1}$).

Sferele spațiilor Banach infinit dimensionale, așa cum este $C[0, 1]$, nu au proprietatea de convexitate a sferelor din R^3 de aceea, contrar intuiției bazată pe reprezentări din R^3, intersecția $\mathscr{B}(0;\ 1) \cap \mathscr{B}(1;\ 2)$ conține o infinitate de puncte și în particular toate punctele fixe ale lui T, afară de f_0, așa cum rezultă din 1) și 2).

3) Punctele fixe ale lui T se găsesc la distanță finită unul de altul și anume mai mare ca 1.

Scanned with OKEN Scanner

a) Să vedem mai întîi $\rho(f_0, f_k)$.

$a_1)$ $k = 2m (m \geqslant 1)$,

$$\rho(f_0, f_{2m}) = \max_{\eta \in [0,1]} \left| \sin \frac{\pi}{2} \eta - \sin \left(\frac{\pi}{2} \eta + 2m\pi\eta \right) \right| \geqslant \left| \sin \frac{\pi}{2} \eta - \right.$$

$$\left. - \sin \left(\frac{\pi}{2} + 2m\pi \right) \eta \right|_{\eta = \frac{4m-1}{4m+1}} = \sin \frac{4m-1}{4m+1} \frac{\pi}{2} - \sin \frac{4m+1}{2} \pi \frac{4m-1}{4m+1} =$$

$$= \sin \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2}{4m+1} \right) + 1 \geqslant 1 + \sin \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2}{4 \cdot 1 + 1} \right) =$$

$$= 1 + \sin \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2}{5} \right) = 1 + \sin \frac{3\pi}{10} \simeq 1{,}809.$$

Observăm că $\rho(f_0, f_{2m}) \to 2$ cînd $m \to \infty$

$a_2)$ $k = 2m + 1 (m \geqslant 0)$,

$$\rho(f_0, f_{2m+1}) = \max_{\eta \in [0,1]} \left| \sin \frac{\pi}{2} \eta + \sin \left(\frac{\pi}{2} \eta + (2m+1)\pi\eta \right) \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \sin \frac{\pi}{2} \eta + \sin (4m+3) \frac{\pi}{2} \eta \right|_{\eta = \frac{4m+1}{4m+3}} = \sin \frac{4m+1}{4m+3} \frac{\pi}{2} +$$

$$+ \sin (4m+1) \frac{\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2}{4m+3} \right) + 1 \geqslant 1 + \sin \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{2}{3} \right) = 1{,}5.$$

Din nou $\rho(f_0, f_{2m+1}) \to 2$ cînd $m \to \infty$.

Pentru $m = 0$ deci pentru $\rho(f_0, f_1)$ putem găsi o estimare mai bună căci

$$\rho(f_0, f_1) = \max_{\eta \in [0,1]} \left| \sin \frac{\pi}{2} \eta + \sin \frac{3\pi}{2} \eta \right| = \max_{\eta \in [0,1]} \left| \sin \frac{\pi}{2} \eta + \right.$$

$$\left. + 3 \sin \frac{\pi}{2} \eta - 4 \sin \frac{3\pi}{2} \eta \right| = \max_{\eta \in [0,1]} 4 \left| \sin \frac{\pi}{2} \eta - \sin \frac{3\pi}{2} \eta \right|.$$

Notînd $\sin \frac{\pi}{2} \eta = x$, expresia $x - x^3$ are maxim pentru

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \rho(f_0, f_1) = 4 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right) = \frac{8\sqrt{3}}{9} \simeq 1{,}55$$

(corespunzător lui $\eta \simeq 0{,}4$, față de 0,33 care corespunde evaluării 1,5 de mai sus). Deci, funcția f_0 se găsește la distanță mai mare ca 1,5 de oricare din celelalte puncte fixe ale lui T.

Scanned with OKEN Scanner

b) Fie acum f_k, f_l cu k și l $(k < l)$ unul par și celălalt impar; atunci

$$\rho(f_k, f_l) = \max_{\eta \in [0,1]} \left| \sin (2k+1)\frac{\pi}{2}\eta + \sin (2l+1)\frac{\pi}{2}\eta \right| \geqslant$$

$$\geqslant \left| \sin (2k+1)\frac{\pi}{2}\eta + \sin (2l+1)\frac{\pi}{2}\eta \right|_{\eta = \frac{1}{2l+1}} = \left| \sin \frac{2k+1}{2l+1}\frac{\pi}{2} + 1 \right| > 1.$$

Metrica fiind simetrică, este suficient să considerăm cazul $k < l$

c) Fie, în sfîrșit, k și l sau ambele pare sau ambele impare; atunci

$$\rho(f_k, f_l) = \max_{\eta \in [0,1]} \left| \sin (2l+1)\frac{\pi}{2}\eta - \sin (2k+1)\frac{\pi}{2}\eta \right|.$$

Să considerăm $k > l$. În acest caz, urmărind poziția primului punct de maxim $\eta_1 = \dfrac{3}{2k+1}$, al funcției $-\sin (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\eta$, se vede că el poate fi situat fie între origine și primul punct de maxim $\eta_1' = \dfrac{1}{2l+1}$ al funcției $\sin (2l+1)\dfrac{\pi}{2}\eta$, fie între primul și cel de-al doilea punct $\dfrac{2}{2l+1}$ de intersecție cu axa η, fie între acesta din urmă și primul punct de maxim $\dfrac{3}{2l+1}$ al funcției $\sin (2l+1)\dfrac{\pi}{2}\eta$. Situația limită cînd $\dfrac{3}{2k+1} = \dfrac{3}{2l+1}$, deci cînd primul punct de maxim al funcției $-\sin (2k+1)\dfrac{\pi}{2}\eta$ coincide cu primul punct de minim al funcției $\sin (2l+1)\dfrac{\pi}{2}\eta$ și deci cînd cele două curbe sînt simetrice una alteia în raport cu axa $O\eta$, corespunde cazului $k = l$. Dacă punctul η_1 continuă să se deplaseze spre dreapta, atunci deja sîntem în cazul $k < l$ care nu mai trebuie considerat datorită, așa cum am menționat, proprietății de simetrie a metricii.

Cele trei posibilități indicate mai sus corespund figurilor 3.4.2—3.4.4 și vor fi analizate la punctele $c_1)$—$c_3)$, de mai jos.

$c_1)$ În cazul $l \leqslant \dfrac{k-1}{3}$ $\left(\text{deci cînd } \dfrac{3}{2k+1} \leqslant \dfrac{1}{2l+1}\right)$, adunînd funcțiile reprezentate în figurile 3.4.2, 3.4.4 obținem:

$$\rho(f_k, f_l) \geqslant \left| \sin (2k+1)\frac{\pi}{2}\eta - \sin (2l+1)\frac{\pi}{2}\eta \right|_{\eta = \frac{3}{2k+1}} =$$

$$= \left| -1 - \sin \frac{2l+1}{2k+1}\frac{\pi}{2} \right| > 1.$$

Scanned with OKEN Scanner

c_2) În cazul $\frac{k-1}{3} \leqslant l \leqslant \frac{4k-1}{6}$ $\left(\text{deci cînd } \frac{1}{2l+1} \leqslant \frac{3}{2k+1} \leqslant \frac{2}{2l+1}\right)$ avem

$$\rho(f_k, f_l) \geqslant \left| -\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\eta + \sin(2l+1)\frac{\pi}{2}\eta \right|_{\eta=\frac{3}{2k+1}} =$$

$$= \left| 1 + \sin\frac{2l+1}{2k+1}\frac{\pi}{2} \right| > 1.$$

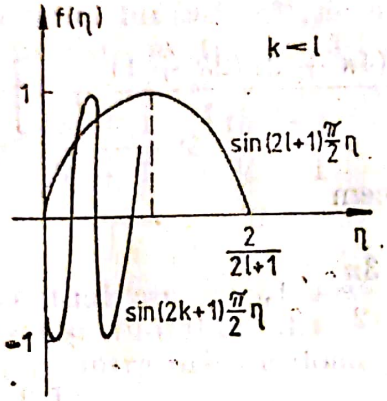


Fig. 3.4.2

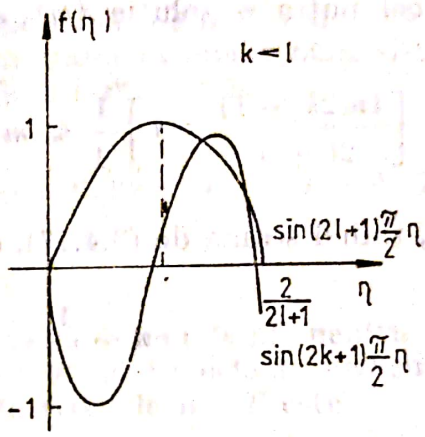


Fig. 3.4.3

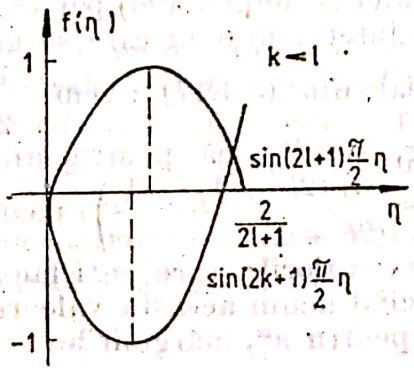


Fig. 3.4.4

c_3) În cazul $\frac{4k-1}{6} \leqslant l < k$ $\left(\text{cînd } \frac{2}{2l+1} \leqslant \frac{3}{2k+1} < \frac{3}{3l+1}\right)$ vom arăta că, în cel puțin unul din intervalele în care curba $\sin(2l+1)\frac{\pi}{2}\eta$ este deasupra axei $O\eta$, există cel puțin un punct de maxim $\frac{4m^* - 1}{2k+1}$ al curbei $-\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\eta$. Atunci $\rho(f_k, f_l) > 1$, ρ fiind minorată de modulul din $1 +$ un sinus de unghi cuprins între

$4n^* \frac{\pi}{2}$ și $(4n^* + 2)\frac{\pi}{2}$ care este pozitiv. Pentru aceasta, trebuie să arătăm că următorul sistem de inecuații

$$\text{(3.4.16)} \qquad \begin{cases} \dfrac{4n}{2l+1} \leqslant \dfrac{4m-1}{2k+1} \leqslant \dfrac{4n+2}{2l+1} \\ 4m - 1 \leqslant 2k + 1,\ 4n + 2 \leqslant 2l + 1, \end{cases}$$

în cazul

$$\text{(3.4.17)} \qquad \frac{4k-1}{6} \leqslant l < k$$

admite cel puțin o soluție (m^*, n^*), $n^*, m^* \in Z$. În adevăr, din (3.4.16) avem

$$\text{(3.4.18)} \qquad \left[\frac{4n(2k+1)}{2l+1} + 1\right]\frac{1}{4} \leqslant m \leqslant \left[\frac{(4n+2)(2k+1)}{2l+1} + 1\right]\frac{1}{4},$$

din care, ținînd seama de (3.4.17), deducem

$$\text{(3.4.19)} \qquad n + \frac{1}{4} < m < \frac{3n}{2} + 1,$$

astfel că m poate lua cel mult valorile $m = n + 1,\ n + 2, \ldots, \left[\frac{3}{2}n + 1\right]$, unde [ ] desemnează aici (și numai aici) partea întreagă. Deoarece diferența dintre marginile intervalului în care se află m este, din (3.4.11), egală cu $\frac{1}{2}\frac{2k+1}{2l+1}$ iar din (3.4.17) avem $\frac{1}{2} < \frac{1}{2}\frac{2k+1}{2l+1} < \frac{3}{4}$, m trebuind să fie întreg, rezultă că pentru un n dat, în intervalul $\left(\frac{4n(2k+1)}{4(2l+1)} + \frac{1}{4}, \frac{(4n+2)(2k+1)}{4(2l+1)} + \frac{1}{4}\right)$, poate lua cel mult o singură valoare. Singura dintre valorile care satisfac (3.4.19) și (3.4.17) este $m^* = n^* + 1$. Introducînd acum această valoare în primele două inegalități (3.4.16) obținem, pentru n^*, mărginirile

$$\text{(3.4.20)} \qquad \frac{6l+1-4k}{8(k-l)} \leqslant n^* \leqslant \frac{6l+3}{8(k-l)}$$

Cum însă $\frac{6l+3}{8(k-l)} < \frac{2l-1}{4}$, adică satisface și ultima inegalitate (3.4.16) doar pentru $l > 3$, în loc de (3.4.20) luăm

$$\text{(3.4.20')} \qquad \frac{6l+1-4k}{8(k-l)} \leqslant n^* \leqslant \frac{2l-1}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Din (3.4.20′) deducem că lungimea intervalului căruia aparţine n^* este mai mare ca 1, deci există sigur un întreg n^* şi corespunzător un întreg $m^* = n^* + 1$ care să satisfacă (3.4.16) în condiţiile (3.4.17).

În mod analog, s-ar putea studia existenţa unui punct de minim al curbei $-\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}\eta$ situat într-unul din intervalele în care funcţia $\sin(2l+1)\frac{\pi}{2}\eta$ este negativă, cînd din nou majorînd pe $\rho(f_k, f_l)$ cu modulul din $-1 +$ sinusul unui unghi cuprins între $(4n^{**}+2)\frac{\pi}{2}$ şi $(4n^{**}+4)\frac{\pi}{2}$, deci o cantitate negativă, de unde $\rho(f_k, f_l) > 1$. Cum un astfel de studiu ar fi fost necesar doar cînd n-am fi reuşit să demonstrăm existenţa lui (m^*, n^*), ne mărginim aici să menţionăm sistemul de inecuaţii pe care ar trebui să-l satisfacă (m^{**}, n^{**}):

$$\frac{4n+2}{2l+1} \leqslant \frac{4m+1}{2k+1} \leqslant \frac{4n+4}{2l+1}, \quad 4m+1 \leqslant 2k+1, \quad 4n+4 \leqslant 2l+1. \tag{3.4.21}$$

Dacă, eventual, am dori să avem o evaluare mai bună pentru $\rho(f_k, f_l)$ ar fi necesar şi studiul lui (3.4.21). În orice caz, din cele de mai sus rezultă că distanţa dintre oricare două puncte fixe ale lui T este

$$\rho(f_k, f_l) > 1, \quad \forall\, k, l = 0, 1, 2, \cdots \tag{3.4.22}$$

T este continuu, fiind cît de doi operatori continui.

T este mărginit pe un subdomeniu al lui $\mathscr{D}(T)$. Nu ne putem aştepta ca T să fie mărginit pe tot $\mathscr{D}(T)$ căci în punctele $\bar{f}$ funcţia $T\tilde{f}$ are modulul infinit şi deci operatorul T fiind continuu, pentru f din jurul lui $\tilde{f}$ vom avea valori pentru $|Tf(\eta)|$ oricît de mari, deşi finite. De aceea este posibil să obţinem un operator mărginit dacă scoatem din $\mathscr{D}(T)$ cel puţin anumite sfere din jurul punctelor singulare $\tilde{f}$. Fie, deci, $\tilde{T} : A_M \to \tilde{T}(A_M)$ restricţia lui T la

$$A_M = \left\{ f \in C[0,1] \,\middle|\, \left| \int_0^1 \eta f(\eta)\, d\eta \right| \geqslant M \right\}.$$

Cum $\int_0^1 \eta \tilde{f}(\eta)\, d\eta = 0$ (prin definiţie) şi deoarece

$$\left| \int_0^1 \eta f(\eta)\, d\eta \right| = \left| \int_0^1 \left(\eta f(\eta) - \eta \tilde{f}(\eta) \right) d\eta \right| \leqslant \int_0^1 \eta\, |f(\eta) - \tilde{f}(\eta)|\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} \max_{\eta \in [0,1]} |f(\eta) - \tilde{f}(\eta)|,$$

Scanned with OKEN Scanner

rezultă că dacă $\rho(f,\tilde{f}) < M$ deci dacă $f \in \mathscr{B}(\tilde{f}\,;\,M)$, atunci $f \in \mathbf{C}\,A_{\frac{M}{2}}$. Deci scoţînd din $C[0,1]$ pe $\mathbf{C}\,A_{\frac{M}{2}}$ am eliminat atît sfere de rază M din jurul punctelor singulare, cît şi puncte care deşi se găsesc în afara acestor sfere, au totuşi $\left|\int_0^1 \eta f(\eta)\,d\eta\right| < M$. Astfel, din $f \in A_{\frac{M}{2}}$ rezultă, în particular, $\max\limits_{\eta\in[0,1]} |f(\eta)| \geqslant M$ şi $\left|\int_0^1 \eta f(\eta)\,d\eta\right| \geqslant \frac{M}{2}$. Este uşor de văzut că $A_M \supset A_{M'}$, dacă $M < M'$ punctele lor singulare neaparţinînd nici unui A_M. În schimb, cînd $M = 0$, $A_0 = C[0,1]$ şi această proprietate nu se mai păstrează.

A_M este o mulţime închisă în $C[0,1]$ în topologia generată de norma $\|f\| = \max\limits_{\eta\in[0,1]} |f(\eta)|$; în adevăr, T_2 este funcţională liniară şi continuă pe $C[0,1]$ şi deci mulţimea $A_M = T_2^{-1}(S_M)$ este o mulţime închisă, unde $S = \{a \in R \mid \max|a| \geqslant M\}$.

$C[0,1]$ este spaţiul metric cu distanţa $\rho(f,g) = \max\limits_{\eta\in[0,1]} |f(\eta)-g(\eta)|$. Mulţimea $A_M \subset C[0,1]$ este de asemenea spaţiu metric dar nu este spaţiu liniar. De aceea spunem că mulţimea $B \subset A_M$ se numeşte mărginită dacă există $r > 0$ astfel încît pentru orice f', $f'' \in B$ avem $\rho(f',f'') < r$. Un operator $\mathscr{T} : A_M \to \mathscr{R}(T)$ se numeşte mărginit dacă transformă mulţimi mărginite $B \subset A_M$ în mulţimi mărginite $\mathscr{T}(B) \subset C^2[0,1]$, deci dacă există $c > 0$ astfel încît pentru orice $f', f'' \in B$ avem $\rho(Tf', Tf'') < c$.

Să notăm cu ${}_MT_1$ restricţia lui T_1 la A_M. Operatorul ${}_MT_1 : A_M \to {}_M\mathscr{T}_1(A_M)$ este mărginit. În adevăr, fie mulţimea arbitrară mărginită $B \subset A_M$ şi f', f'' două elemente oarecare ale sale. Atunci, pe baza teoremei de medie şi ţinînd seama că B este mărginit, avem

$$|{}_MT_1f'(\eta) - {}_MT_1f''(\eta)| = \left|\int_0^\eta \int_{\eta'}^1 (f'(\eta'') - f''(\eta''))\,d\eta''\,d\eta'\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\eta\in[0,1]} |f'(\eta) - f''(\eta)| \left(\int_0^\eta \int_{\eta'}^1 d\eta''\,d\eta'\right) = 1/2\ \rho(f',f''),$$

de unde rezultă $\max\limits_{\eta\in[0,1]} |{}_MT_1f'(\eta) - {}_MT_1f''(\eta)| \leqslant \frac{1}{2}\rho(f',f'')$, deci $\rho({}_MT_1\,f', {}_MT_1f'') < \frac{r}{2}$, adică ${}_MT_1$ este mărginit.

În mod analog se poate demonstra că funcţionala $T_2|_{A_M}$ este mărginită.

Să remarcăm faptul că operatorii T_1 şi ${}_MT_1$ şi funcţionala $T_2|_{A_M}$, avînd domenii de definiţie neliniare, sînt neliniari deşi extensiile lor $\tilde{T}_1$ respectiv T_2 la $C[0,1]$, cu păstrarea corespondenţei, sînt liniare.

În A_M avem, notînd restricţia $\tilde{T}$ a lui T la A_M tot cu T,

$$(*) \qquad |Tf(\eta)| = \frac{\left|\int_0^\eta \int_{\eta'}^1 f(\eta'')\,d\eta''\,d\eta'\right|}{\left|\int_0^1 \eta f(\eta)\,d\eta\right|} \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{1}{M} \max_{\eta\in[0,1]} |f(\eta)|,$$

Scanned with OKEN Scanner

deci T duce mulțimi mărginite din jurul originii în mulțimi mărginite din jurul originii. Din inegalitatea (*) se vede că în spațiul mai restrîns $A_M \cap S(0\,;\,2M)$ avem $|Tf(\eta)|<1$, cu alte cuvinte, toate funcțiile f care au proprietățile $\left|\int_0^1 \eta f(\eta)\,d\eta\right| \geqslant M$, $\max\limits_{\eta\in[0,1]} |f(\eta)| = 2M$ sînt transformate de T în funcții al căror maxim este mai mic ca 1. În general, în spațiul și mai restrîns $A_M \cap S(0\,;\,kM)$ cu $k>2$ avem $|Tf(\eta)|<k$.

Inegalitatea (*) nu este suficientă pentru a deduce că T este mărginit pe A_M, căci nu putem deduce că $\rho(Tf',\ Tf'') < C\rho(f', f'')$, unde f', $f'' \in B$ iar B este mulțime mărginită arbitrară în A_M. În A_M avem

$$|Tf'(\eta) - Tf''(\eta)| = \left| \frac{\int_0^\eta \int_1^{\eta'} f'(\eta'')\,d\eta''\,d\eta'}{-\int_0^1 \eta f'(\eta)\,d\eta} - \frac{\int_0^\eta \int_1^{\eta'} f''(\eta'')\,d\eta''\,d\eta'}{-\int_0^1 \eta f''(\eta)\,d\eta} \right| =$$

$$= \frac{\left|\int_0^1 \eta f''(\eta)\,d\eta \int_0^\eta \int_1^{\eta'} (f'-f'')\,d\eta''\,d\eta' + \int_0^1 \eta(f''-f')\,d\eta \int_0^\eta \int_1^{\eta'} f''\,d\eta''\,d\eta'\right|}{\left|\int_0^1 \eta f'(\eta)\,d\eta\right| \left|\int_0^1 \eta f''(\eta)\,d\eta\right|} \leqslant$$

(**)

$$\leqslant \frac{\left|\int_0^1 \eta f''\,d\eta\right| \left|\int_0^\eta \int_{\eta'}^1 (f'-f'')\,d\eta''\,d\eta'\right| + \left|\int_0^1 \eta(f''-f')\,d\eta\right| \left|\int_0^\eta \int_{\eta'}^1 f''\,d\eta''\,d\eta'\right|}{\left|\int_0^1 \eta f'(\eta)\,d\eta\right| \left|\int_0^1 \eta f''(\eta)\,d\eta'\right|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\frac{1}{2}}{M}\rho(f', f'') + \frac{1}{2}\rho(f', f'') \max_{\eta\in[0,1]} |f''(\eta)|.$$

Cum nici inegalitatea (**) nu implică mărginirea lui T, să restrîngem și mai mult spațiul de definiție al lui T la $A_M \cap B_{kM}$, unde B_{kM} este mulțimea funcțiilor din $\mathcal{D}(T)$ care se găsesc pe coaja sferei $B(0\,;\,kM)$ $(k \geqslant 2)$. Deoarece $\max\limits_{\eta\in[0,1]} |f''(\eta)| = kM$ din inegalitatea (**) găsim $\rho(Tf', Tf'') \leqslant$ $\leqslant \frac{k+1}{2M}\rho(f', f'')$, deci T este mărginit pe $A_M \cap B_{kM}$ (deoarece $f \in A_M$, rezultă $\max\limits_{\eta\in[0,1]} |f(\eta)| \geqslant 2M$ iar pentru f fixat, există K, $0<K<\infty$, astfel încît $\max\limits_{\eta\in[0,1]} |f(\eta)| < K$ rezultă că există $k>2$ astfel încît f să se găsească pe coaja sferei $B(0\,;\,kM)$.

Alegînd în particular $M = \frac{1}{2}$, $f'' = 1$ (căruia îi corespunde $k=2$) și scriind f în loc de f', din (**) deducem $\rho(Tf,\ T1) \leqslant \rho(f,\ 1)$ din care

rezultă un criteriu foarte general de apartenență a lui f la C_{TT} și anume : dacă

$$f \in A_1 \cap B_1 = \left\{ f \in \mathcal{D}(T) \,\middle|\, \left| \int_0^1 \eta f(\eta)\, d\eta \right| \geqslant 1,\ \max_{\eta \in [0,1]} |f(\eta)| = 1 \right\}$$

iar $\rho(f, 1) < 1$, atunci f este tipic transformabilă în mulțimea $A_1 \cap B_1$. Cum $Tf = T(\alpha f)$ rezultă că luînd $k = \frac{1}{M}$ ca mai sus pentru orice $M > 0$ și $f \in A_M \cap B_1$, avem.

TEOREMĂ. *Dacă* $f \in A_M \cap B_1 (M > 0)$ *și* $\rho(f, 1) < \frac{2M^2}{M+1}$, *atunci* f *este tipic transformabilă.*

Probleme deschise. Acest studiu general poate fi continuat prin considerarea în loc de $A_M \cap B_1$ a unor mulțimi mai restrînse și anume clase de funcții de un anumit tip. Atunci, deoarece știm forma tuturor funcțiilor $\overline{f}$ din acea clasă, putem ține seama de toate aceste funcții $\overline{f}$ și se va obține un criteriu mai puternic decît în cazul cînd se lua în considerație tot nucleul lui T.

Operatorul T a fost definit astfel încît să fie surjectiv, T nu este însă injectiv el ducînd o întreagă rază (prin rază înțelegînd mulțimea funcțiilor αf cu $\alpha \in R \setminus \{0\}$) într-un singur punct. Dat fiind că un punct Tf provine numai din raza αf, în mod natural, plecînd de la T, putem obține un operator bijectiv fie factorizînd după relația de echivalență $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow f_1 = \alpha f_2 (\alpha \in R \setminus \{0\})$, fie proiectînd pe $\mathcal{D}(T)$ pe un spațiu al său format din acele funcții $F \in \mathcal{D}(T)$ care au proprietatea $T_2 F = 1$. Operatorul bijectiv obținut are neajunsul că, conservă dificultatea, întîlnită și la operatorul T, de a avea drept domeniu de definiție un subspațiu necomplet al unui spațiu Banach (căci nu conține originea). Acest domeniu de definiție ca și $\mathcal{D}(T)$, poate fi organizat doar ca spațiu metric.

Factorizarea lui $C[0, 1]$ după relația de echivalență $f_1 \sim f_2 \Leftrightarrow T_2 f_1 = T_2 f_2$, datorită faptului că $C[0, 1]/\sim$ este izomorf cu R, nu conduce la ceva nebanal în problema noastră.

O altă modalitate de a studia proprietatea de tipic transformabilitate a lui T este aceea de a defini un cît mai mare subspațiu închis $\mathcal{A}(T)$ al lui $\mathcal{D}(T)$ care să conțină punctele $(1, T1)$ și un singur punct fix al lui T, de exemplu, pe f_0, în plus să aibă proprietatea $T(\mathcal{A}(T)) \subset \mathcal{A}(T)$. Un astfel de spațiu ar fi putut fi A_M dar pentru el n-am putut demonstra proprietatea de invarianță $T(\mathcal{A}(T)) \subset \mathcal{A}(T)$. (Această proprietate nu există nici pentru T definit pe $\mathcal{D}(T)$ căci $\mathcal{R}(T) \not\subset \mathcal{D}(T)$).

Desigur, un mod de a genera mulțimea funcțiilor tipic transformabile, deci a funcțiilor din $\mathcal{D}(T)$ care au proprietatea $\rho(Th, T1) < 1$ este aceea de a găsi nucleul următorului operator neliniar, continuu pe $\mathcal{D}(T)$,

$$\hat{T}_h \cdot = (Th) T_2 \cdot - T_1 \cdot,$$

unde $Th \in \mathscr{B}(T1\,;1)$ este fixat și cunoscut. Indicele h arată faptul că $\hat{T}$ depinde de h, deci că avem o familie de operatori. Este de așteptat ca datorită continuității lui $\hat{T}h$ să avem că toate funcțiile tipic transformabile să se afle într-o vecinătate $\mathscr{V}_{\alpha 1}$ a razei $\alpha 1$ care este preimaginea lui $T1$ (fig. 3.4.5). Evident, mulțimea funcțiilor tipic transformabile este $\{g \in \mathscr{D}(T) \mid \rho\,(Tg,\, T1) \leqslant 1\}$ a cărei caracterizare cuprinsă în însăși definiție este suficientă din punct de vedere abstract. Este necesar însă, pen-

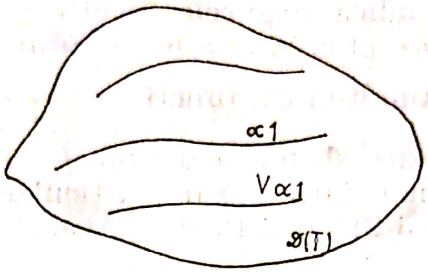


Fig. 3.4.5

tru calcule numerice, să vedem ce formă pot avea aceste funcții. De aceea trecem la studiul unor clase speciale de funcții, curent folosite în practica inginerească.

3.4.3. Clase de funcții tipic transformabile

1. *Funcțiile pozitive* $(f(\eta) \geqslant 0)$ *și funcțiile negative.* Deoarece $Tf = T(-f)$ este suficient să considerăm numai cazul funcțiilor pozitive. Fie, deci, $f(\eta) \geqslant 0$; atunci $\int_1^{\eta'} f(\eta'')\,\mathrm{d}\eta'' > 0$, de unde, datorită proprietății de monotonie a integralei Riemann dintr-o funcție pozitivă ca funcție de limita superioară avem

$$\int_0^{\eta}\int_1^{\eta'} f(\eta'')\,\mathrm{d}\eta''\,\mathrm{d}\eta' < \int_0^{1}\int_1^{\eta'} f(\eta'')\,\mathrm{d}\eta''\,\mathrm{d}\eta' \quad (0 \leqslant \eta \leqslant 1)$$

și deci $0 < (Tf)\,(\eta) < 1$. Atunci,

$$a - \eta(2-\eta) < (Tf)(\eta) - \eta(2-\eta) < 1 - \eta(2-\eta);$$

$$\max_{\eta \in [0,\,1]} |\,\eta(2-\eta)\,| = 1, \quad \max_{\eta \in [0,\,1]} |\,1 - \eta(2-\eta)\,| = 1,$$

deci

$$|\,(Tf)(\eta) - (T1)(\eta)\,| < 1$$

adică funcțiile pozitive sînt tipic transformabile. În particular, în această clasă intră funcțiile constante k pentru care avem

$$\rho(Tk,\, T1) = 0.$$

2. Binoamele de grad n de forma $f(\eta) = \eta^m + a_n\eta^n$, $(a \neq 0, 0 \leqslant \eta \leqslant 1,\ n > m)$ pentru

$$a_n \in R \setminus (a_n', a_n'') \cup (-\infty, a_n''') \cup (a_n^{IV}, +\infty) \bigcup_{r\in\Gamma} (|\, a_r, a_{r+1})$$

unde $a_n' < -\dfrac{n+2}{m+2}$, $a_n'' > -\dfrac{n+2}{m+2}$, $a_n''' < a_n'$, $a_n^{IV} > 0$. În unele cazuri (de exemplu, cînd $m = 0$ și $n = 1$) avem $a_n''' = -\infty$, $a_n^{IV} = +\infty$ și $a_r = a_{r+1}$, $\forall r \in \Gamma$, adică singurele funcții $\eta^m + a_n\eta^n$ netipic transformabile sînt cele corespunzătoare lui a_n din intervalul (a_n', a_n'') din jurul lui $-\dfrac{n+2}{m+2}$. Amintim că, funcția $\eta^m - \dfrac{n+2}{m+2}\eta^n$ este singura de tipul $\eta^m + a_n\eta^n$ în care T nu este definit.

Să considerăm mai întîi cazul particular $m = 0$, $n = 1$, deci $f(\eta) = 1 + a_1\eta (a_1 \neq -3/2)$ pentru care avem

$$(Tf)(\eta) = \frac{a_1\eta^3 + 3\eta^2 - 3\eta(2 + a_1)}{-(3 + 2a_1)},\quad |Tf - T1| = \left|\frac{a_1}{3 + 2a_1}\right| |\eta^3 - 2\eta^2 + \eta|,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}(\eta^3 - 2\eta^2 + \eta) = 3(\eta - 1)\left(\eta - \frac{1}{3}\right),$$

$$\rho(Tf, T1) = \max_{\eta\in[0,1]} |Tf - T1| = \left|\frac{a_1}{3 + 2a_1}\right| \cdot \frac{4}{27} \equiv g(a_1)$$

Curba $g(a_1)$ este reprezentată în figura 3.4.6 din care se vede că $\rho(Tf, T1) < 1$ pentru acele funcții f din familia uniparametrică $1 + a_1\eta$ pentru care $a_1 \in \left(-\dfrac{81}{50}, -\dfrac{81}{58}\right)$; în planul $(\eta, f(\eta))$ această familie reprezintă un fascicul de drepte ce trec prin punctul $(0, 1)$ (fig. 3.4.7). Toate acestea sînt

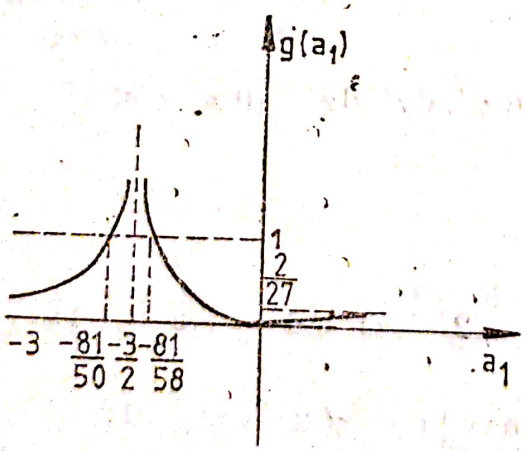


Fig. 3.4.6

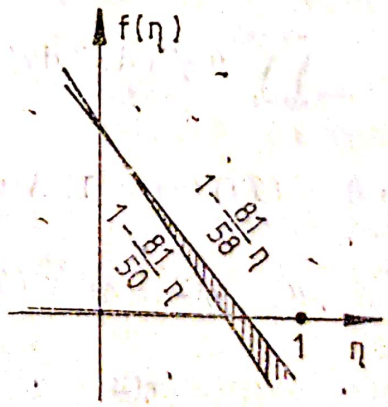


Fig. 3.4.7

tipic transformabile exceptînd cele din zona haşurată dintre dreptele $1 - \dfrac{81}{58}\eta$ și $1 - \dfrac{81}{50}\eta$.

Fie, acum, binomul $f(\eta) = \eta^m + a_n\eta^n \left(n > m,\ a_n \neq -\dfrac{n+2}{m+2},\ 0 \leqslant \eta \leqslant 1\right)$.

Scanned with OKEN Scanner

Avem

$$(Tf)(\eta) =$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)\,\eta^{m+2} + a_n(m+1)(m+2)\,\eta^{n+2} - [n+1+a_n(m+1)](n+2)(m+2)\,\eta}{-(n+1)(m+1)[n+2+a_n(m+2)]},$$

$$(Tf)(\eta) - (T1)(\eta) =$$

$$\frac{(n+1)(n+2)\,\eta^{m+2} + a_n(m+1)(m+2)\,\eta^{n+2} - [n+2}{-(n+1)(m+1)[n+2+a_n(m+2)]} +$$

$$+ \frac{+a_n)(m+2](m+1)(n+1)\eta^2 + [m(n+1)(n+2) + n(m+1)(m+2)\,a_n]\,\eta}{-(n+1)(m+1)[n+2+a_n(m+2)]}.$$

Putem deci scrie $(Tf)(\eta) - (T1)(\eta) = A_1\eta^{n+2} + A_2\eta^{m+2} - A_3\eta^2 + A_4$, unde A_i, $(i=1,\ldots,4)$ sînt expresiile de forma $A_i = \dfrac{\alpha_i + \beta_i a_n}{-(n+1)(m+1)[n+2+a_n(m+2)]}$ iar α_i și β_i sînt polinoame în m și n de gradul cel mult trei, α_i și $\beta_i \geqslant 0$. Fie $\eta^*(a_n)$ punctul care face maxim modulul $|Tf - T1)$ deci

$$\rho(Tf, T1) = |(Tf)(\eta^*) - T1(\eta^*)| =$$

$$= |\alpha + a_n\beta| / (n+1)(m+1)\,|(n+2) + a_n(m+2)|.$$

Dacă η^* nu depinde de a_n (așa cum s-a întîmplat în cazul $m = 0 \quad n = 1$), atunci avem

$$\alpha = \alpha_1\eta_i^{n+2} + \alpha_2\eta_i^{m+2} - \alpha_3\eta_i^2 + \alpha_4, \quad \beta = \beta_1\eta_i^{n+2} + \beta_2\eta_i^{m+2} - \beta_3\eta_i^2 + \beta_4.$$

Notînd

$$g(a_n) = \frac{|\alpha + a_n\beta|}{(n+1)(m+1)\,|n+2+a_n(m+2)|},$$

putem face considerații cu totul analoge celor de mai sus care corespund cazului $m = 0, \quad n = 1$. Deci, ca mai sus, vom avea un interval (a_n', a_n'') în jurul lui $-\dfrac{n+2}{m+2}$, cu proprietatea că nici o curbă $\eta^m + a_n\eta^n$, cu a_n din acel interval, nu este tipic transformabil. Dacă $\beta^* = \dfrac{\beta}{(n+1)(m+1)(m+2)} < 1$ ca și în cazul $m = 0$, $n = 1$, curba $g(a_n)$ are asimptota orizontală $g(a_n) = \beta^*$ și singurele funcții de tipul $\eta^m + a_n\eta^n$ netipic transformabile sînt cele cu $a_n \in (a_n', a_n'')$. Spre deosebire de cazul $m = 0$, $n = 1$, dacă $\beta^* > 1$, atunci (fig. 3.4.8) în plus față de cazul $\beta^* < 1$ sînt netipic transformabile funcțiile pentru care $a_n \in (a_n'', \infty)$ și $a_n \in (-\infty, a_n^{IV})$. Să menționăm că pentru $n \leqslant 5$, $x^*(a_n)$ (ca soluție a unei ecuații de grad cel mult patru) este o funcție întreagă de radicali din polinoame în a_n astfel că raționamentele de mai sus rămînd adevărate. Cînd $n > 5$, este posibil să existe și alte domenii (a_r, a_{r+1}) cu proprietatea $g(a_n) > 1$ pentru $a_n \in (a_r, a_{r+1})$.

Scanned with OKEN Scanner

Datorită faptului că $T(\alpha f) = Tf$, $\alpha \in R \setminus \{0\}$, rezultă că cele spuse mai sus asupra familiei uniparametrice de curbe sînt valabile și pentru familia biparametrică $a_0\eta^m + b_0\eta^n$ cu a_0 și b_0 arbitrari $\left(\text{dar } \frac{b_0}{a_0} \neq -\frac{n+2}{m+2}\right)$.

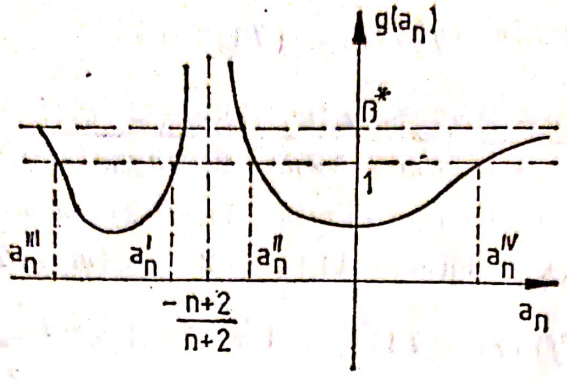


Fig. 3.4.8

3. Cu mult mai dificil este cazul familiilor de curbe ce depind de trei parametri $a_p\eta^p + a_m\eta^m + a_n\eta^n$, $0 < p < m < n$, al căror studiu, datorită proprietății $T(a_p f) = Tf$, se reduce la acela ale polinoamelor de tipul $\eta^p + b_m\eta^m + b_n\eta^n$, deci la studiul unei familii biparametrice de curbe.

Fie, de exemplu, cazul particular $p = 0$, $m = 1$, $n = 2$, adică $f(\eta) = 1 + b_1\eta + b_2\eta^2$ pentru care avem

$$(Tf)(\eta) = \frac{\frac{b_2}{12}\eta^4 + \frac{b_1}{6}\eta^3 + \frac{\eta^2}{2} - \left(1 + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{3}\right)\eta}{-\left(\frac{1}{2} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{4}\right)},$$

$$|Tf - T1| = \frac{\left|\frac{b_2}{12}\eta^4 + \frac{b_1}{6}\eta^3 - \left(\frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{4}\right)\eta^2 + \eta\left(\frac{b_1}{6} + \frac{b_2}{6}\right)\right|}{\left|\frac{1}{2} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{4}\right|}.$$

Să notăm cu $\eta^*(b_1, b_2)$ punctul de maxim ($\eta^* < 1$) al funcției $|Tf - T1|$ și fie

$$\rho(Tf, T1) = |(Tf)(\eta^*) - (T1)(\eta^*)| = g(b_1, b_2).$$

Operatorul T nu este definit pentru acele funcții din familia biparametrică $1 + b_1\eta + b_2\eta^2$ pentru care (b_1, b_2) se află în planul $1/2 + b_1/3 + b_2/4 = 0$. În spațiul tridimensional (b_1, b_2, g) suprafața $g = g(b_1, b_2)$ este asimptotică planului $\frac{1}{2} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{4} = 0$ și eventual unui plan Π_1 paralel cu planul (b_1, b_2) de aceea curbele din familia biparametrică de mai sus care nu sînt tipic transformabile, corespund lui b_1 și b_2 pentru care punctele $(b_1, b_2, 0)$ se află între curbele care reprezintă proiecția în planul $g = 0$

Scanned with OKEN Scanner

a intersecției suprafeței $g = g(b_1, b_2)$ cu planul $g = 1$ și eventual în exteriorul domeniului mărginit de curbele ce reprezintă proiecția în planul $g = 0$ a intersecției suprafeței $g = g(b_1, b_2)$ cu planul Π_1.

Fie acum un polinom de grad n cu expresia $f(\eta) = a_n\eta^n + a_{n-1}\eta^{n-1} + \ldots + a_0$ cu $a_i \neq 0 (i = 0, 1, \ldots, n)$. Ca mai sus, se vede că este suficient să studiem funcțiile de forma $f(\eta) = b_n\eta^n + b_{n-1}\eta^{n-1} + \ldots + b_1\eta + 1$.

În spațiul $n+1$ dimensional de puncte $(b_1, \ldots, b_n, g)$, punctele de pe hipersuprafața $\frac{1}{2} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{4} + \ldots + \frac{b_n}{n+2} = 0$ corespund funcțiilor de tipul $b_n\eta^n + \ldots + b_1\eta + 1$ în care operatorul T nu este definit iar punctele din jurul acestei hipersuprafețe și eventual și din alte domenii corespund funcțiilor netipic transformabile de tipul amintit.

4. Fie familia sinusoidelor $f(\eta) = b \sin a\eta$ (b, a constante nenule $0 \leqslant \eta \leqslant 1$); ca mai sus, este suficient să studiem doar cazul cînd $b = 1$, $a > 0$, deci curbele de tipul $f(\eta) = \sin a\eta$. Deoarece $Tf(\eta) = (\eta \cos a/a - \sin a\eta/a^2)/(\cos a/a - \sin a/a^2)$, rezultă că funcțiile din această familie, pentru care nu este definit operatorul T, sînt cele care corespund lui a soluție a ecuației transcedentale, $\operatorname{tg} a = a$. Dacă $0 < a \leqslant \pi$, grafic se constată că a nu satisface această ecuație; pe de altă parte, în acest interval $f(\eta) \geqslant 0$ și deci, conform punctului 1, toate funcțiile de tipul $\sin a\eta$, cu $0 < a \geqslant \pi$, sînt tipic transformabile. Dacă $a > \pi$ și mai ales pentru a apropiat de soluțiile ecuației $\operatorname{tg} a = a$, vom avea și funcții netipic transformabile. Pentru a determina intervalele cărora trebuie să aparțină a pentru ca $f(\eta)$ corespunzător să fie netipic transformabil ținînd seama că $(Tf)(\eta) - (T1)(\eta) = \frac{\eta^2(a - \operatorname{tg} a) + \eta(2 \operatorname{tg} a - a) - \sin a\eta/\cos a}{a - \operatorname{tg} a}$ este necesar, pentru a dat, să rezolvăm ecuația diferențială $\frac{d}{d\eta}[(Tf)(\eta) - (T1)(\eta)] = 0$ adică $2\eta(a - \operatorname{tg} a) + 2 \operatorname{tg} a - a - \frac{a \cos a\eta}{\cos a} = 0$. Fie $\eta^*(a)$ soluția acestei ecuații care realizează maximum absolut al lui $|(Tf)(\eta) - (T1)(\eta)|$. Reprezentînd grafic curba $g = g(a)$ (unde $g(a) = |(Tf)T(\eta^*) - (T1)(\eta^*)|$) în planul (a, g), vom găsi, ca și în cazul familiei $f(\eta) = 1 + a_1\eta$, intervalele căutate pentru a. De exemplu, dacă, $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, atunci intervalul (77°, 78°), deci (4,48549 rad; 4,50294 rad) pentru a_1 corespunde funcțiilor $\sin a\eta$ netipic transformabile.

5. Fie familia cosinusoidelor $f(\eta) = b \cos a\eta$ (b, a constante nenule, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$),

$$(Tf)(\eta) = \left(\frac{1 - \cos a\eta}{a^2} - \frac{\sin a}{a}\eta\right) \Big/ \left(\frac{1 - \cos a}{a^2} - \frac{\sin a}{a}\right)$$

deci T nu este definit în $f(\eta) = b \cos 2k\pi\eta$ și $f(\eta) = b\cos a\eta$, unde a satisface ecuația transcedentală $\operatorname{tg} \frac{a}{2} = a$. Cum prima soluție pozitivă a acestei ecuații este mai mare ca $\pi/2$, rezultă că pentru $0 < a \leqslant \pi/2$ funcțiile $b\cos a\eta$ fiind pozitive sînt tipic transformabile. Raționînd analog cu

a intersecției suprafeței $g = g(b_1, b_2)$ cu planul $g = 1$ și eventual în exteriorul domeniului mărginit de curbele ce reprezintă proiecția în planul $g = 0$ a intersecției suprafeței $g = g(b_1, b_2)$ cu planul Π_1.

Fie acum un polinom de grad n cu expresia $f(\eta) = a_n\eta^n + a_{n-1}\eta^{n-1} + \ldots + a_0$ cu $a_i \neq 0 (i = 0, 1, \ldots, n)$. Ca mai sus, se vede că este suficient să studiem funcțiile de forma $f(\eta) = b_n\eta^n + b_{n-1}\eta^{n-1} + \ldots + b_1\eta + 1$.

În spațiul $n+1$ dimensional de puncte $(b_1, \ldots, b_n, g)$, punctele de pe hipersuprafața $\frac{1}{2} + \frac{b_1}{3} + \frac{b_2}{4} + \ldots + \frac{b_n}{n+2} = 0$ corespund funcțiilor de tipul $b_n\eta^n + \ldots + b_1\eta + 1$ în care operatorul T nu este definit iar punctele din jurul acestei hipersuprafețe și eventual și din alte domenii corespund funcțiilor netipic transformabile de tipul amintit.

4. Fie familia sinusoidelor $f(\eta) = b \sin a\eta$ (b, a constante nenule $0 \leqslant \eta \leqslant 1$); ca mai sus, este suficient să studiem doar cazul cînd $b = 1$, $a > 0$, deci curbele de tipul $f(\eta) = \sin a\eta$. Deoarece $Tf(\eta) = (\eta \cos a/a - \sin a\eta/a^2)/(\cos a/a - \sin a/a^2)$, rezultă că funcțiile din această familie, pentru care nu este definit operatorul T, sînt cele care corespund lui a soluție a ecuației transcedentale, $\operatorname{tg} a = a$. Dacă $0 < a \leqslant \pi$, grafic se constată că a nu satisface această ecuație; pe de altă parte, în acest interval $f(\eta) \geqslant 0$ și deci, conform punctului 1, toate funcțiile de tipul $\sin a\eta$, cu $0 < a \geqslant \pi$, sînt tipic transformabile. Dacă $a > \pi$ și mai ales pentru a apropiat de soluțiile ecuației $\operatorname{tg} a = a$, vom avea și funcții netipic transformabile. Pentru a determina intervalele cărora trebuie să aparțină a pentru ca $f(\eta)$ corespunzător să fie netipic transformabil ținînd seama că $(Tf)(\eta) - (T1)(\eta) = \dfrac{\eta^2(a - \operatorname{tg} a) + \eta(2 \operatorname{tg} a - a) + \sin a\eta/\cos a}{a - \operatorname{tg} a}$ este necesar, pentru a dat, să rezolvăm ecuația diferențială $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}[(Tf)(\eta) - (T1)(\eta)] = 0$ adică $2\eta(a - \operatorname{tg} a) + 2 \operatorname{tg} a - a - \dfrac{a \cos a\eta}{\cos a} = 0$. Fie $\eta^*(a)$ soluția acestei ecuații care realizează maximum absolut al lui $|(Tf)(\eta) - (T1)(\eta)|$. Reprezentînd grafic curba $g = g(a)$ (unde $g(a) = |(Tf)T(\eta^*) - (T1)(\eta^*)|$) în planul (a, g), vom găsi, ca și în cazul familiei $f(\eta) = 1 + a_1\eta$, intervalele căutate pentru a. De exemplu, dacă, $\pi < a < \dfrac{3\pi}{2}$, atunci intervalul (77°, 78°), deci (4,48549 rad; 4,50294 rad) pentru a_1 corespunde funcțiilor $\sin a\eta$ netipic transformabile.

5. Fie familia cosinusoidelor $f(\eta) = b \cos a\eta$ (b, a constante nenule, $0 \leqslant \eta \leqslant 1$),

$$(Tf)(\eta) = \left(\frac{1 - \cos a\eta}{a^2} - \frac{\sin a}{a}\eta\right) \Big/ \left(\frac{1 - \cos a}{a^2} - \frac{\sin a}{a}\right)$$

deci T nu este definit în $f(\eta) = b \cos 2k\pi\eta$ și $f(\eta) = b\cos a\eta$, unde a satisface ecuația transcedentală $\operatorname{tg} \dfrac{a}{2} = a$. Cum prima soluție pozitivă a acestei ecuații este mai mare ca $\pi/2$, rezultă că pentru $0 < a \leqslant \pi/2$ funcțiile $b\cos a\eta$ fiind pozitive sînt tipic transformabile. Raționînd analog cu

punctul 4 constatăm că ne aşteptăm să avem funcţii netipic transformabile aproape de funcţiile corespunzătoare soluţiilor ecuaţiei $\operatorname{tg}\frac{a}{2} = a$ şi aproape de funcţiile $b \cos 2k\,\pi\eta$.

În acest paragraf am pus în evidenţă faptul că fiind dată o mulţime finită de funcţii dintr-o clasă, nu putem afirma nimic despre numărul funcţiilor tipic transformabile faţă de cel al funcţiilor netipic transformabile. În adevăr, dacă funcţiile sînt luate toate corespunzător parametrilor a_i aparţinînd domeniilor de tipul (a_n', a_n''), (a_r, a_{r+1}) etc., atunci avem numai funcţii netipic transformabile; dacă mulţimea de funcţii corespunde parametrilor a_i din exteriorul acestor domenii, atunci funcţiile sînt toate tipic transformabile etc. Exemplele analizate indică totuşi faptul că la distanţă finită sînt domenii mici corespunzătoare funcţiilor netipic transformabile, restul corespunzînd celor tipic transformabile, deci atît mulţimea funcţiilor tipic transformabile cît şi a celor netipic transformabile au acelaşi cardinal (puterea continuumului). Aceasta face ca probabilitatea ca dintr-o anumită clasă să avem funcţii cu proprietatea de tipic transformabilitate este mult mai mare decît a avea funcţii netipic transformabile. Aceasta justifică rezultatele numerice obţinute de Săvulescu.

§ 3.5. Problema de aproximaţii succesive

În paragraful precedent ne-am referit la transformări generale cu un $\varphi(A)$ nespecificat. În cele ce urmează vom expune cîteva argumente intuitive care sugerează condiţii suficiente ca ecuaţia transformată pentru mărimea A să poată fi scrisă sub forma $A = \theta(A)$, unde θ este o contracţie; atunci soluţia ecuaţiei în A există şi este unică, ea putîndu-se determina printr-un procedeu de aproximaţii succesive.

Luînd $\varphi(A) = A^m$, $(m = 0,\ 1,\ 2, \ldots)$, pentru A, se obţine următoarea FID:

$$(3.5.1)\quad A^{1+m} = A_e^{1+m} f_{B,m}^{\oplus} + [A_0^{1+m}(1 - f_{B,m}^{\oplus}) + q_e^*(\eta - f_{B,m}^{\oplus})] + \\ + \sum_{i=1}^{N} F_{i,m1}^{\oplus}(f_{i,m}^{\oplus} - f_{B,m}^{\oplus}) = S_1^* + S_2 + S_3,$$

unde am notat $q_e^* = (1 + m)\ \psi_{\delta A} q_e$, $f_{i(B),m} = (1 + m)\psi_{\delta A}^2 / A^m \cdot f_{i(B)}$ iar $A = A(\xi, \eta, \zeta, \tau)$. Dacă condiţiile la limită sînt $A_0 = q_e^* = 0$, notînd $A_{a,m} = A^{1+m}/A_e^{1+m}$ şi $\bar{F}_{i,m1}^{\oplus} = F_{i,m1}^{\oplus}/A_e^{1+m}$, (3.5.1) se poate scrie sub forma

$$(3.5.1)' \qquad A_{a,m} = \theta(A_{a,m}),$$

unde $\theta(A_{a,m}) = f_{B,m}^{\oplus} + \sum_{i=1}^{N} \bar{F}_{i,m1}^{\oplus}(f_{i,m}^{\oplus} - f_{B,m}^{\oplus})$. Limitîndu-ne la punctul (ξ_1, ζ_1) şi la un anumit moment τ_1, A şi $A_{a,m}$ sînt funcţii doar de η din $C[0, 1]$; în acest caz $\theta : C[0, 1] \to C[0, 1]$. Diferitele mărginiri asupra lui $\theta(A_{a,m})$ se bazează pe semnificaţia fizică a termenilor ecuaţiei (3.5.1). Dacă $f_{i,m}$ şi

Scanned with OKEN Scanner

$f_{B,m}$ care sînt funcţii de A, ∇A şi ΔA sînt tipic transformabile, atunci A^{1+m} se exprimă, după (3.5.1), ca sumă 1) a unui termen fundamental $S_1 = A_e^{1+m} f_{B,m}^{\oplus} \sim A_e^{1+m}\eta(2-\eta)$ care nu conţine în sine istoria curgerii; cu 2) fluctuaţii matematice a căror sumă S_3 este mai mică decît termenul principal dacă $|\bar{F}_{i,m1}^{\oplus}| = \left|\frac{\sum_{i=1}^{N} F_{i,m1}^{\oplus}}{A_e^{1+m}}\right| < 1$ şi dacă $\max_m \frac{|f_{i,m}^{\oplus} - f_{B,m}^{\oplus}|}{|f_{B,m}^{\oplus}|} \leqslant 1$, deci dacă sînt satisfăcute aceste condiţii, atunci $|S_3| < |A_e^{1+m} f_{B,m}^{\oplus}|$ la care se adaugă 3) suma S_2 a doi termeni care reprezintă influenţa condiţiilor la limită. Dacă $A_0 = 0$ şi $q^* \simeq 0$, aşa cum de obicei se întîmplă în stratul limită, atunci $S_2 = 0$.

Deoarece $\eta = \eta(A)$, să notăm $f_{B,m}^{\oplus}(\xi, \zeta, \tau, \eta) = f_{B,m}^{*}(A)$; $f_{i,m}^{\oplus}(\xi, \zeta, \tau, \eta) = f_{i,m}^{*}(A)$; $\bar{F}_{i,m1}^{\oplus}(\xi, \zeta, \tau, \eta) = K_{i,m,A}$. Atunci avem $\theta(A) = f_{B,m}^{*}(A) + \sum_{i=1}^{N} K_{i,m,A}[f_{i,m}^{*}(A) - f_{B,m}^{*}(A)]$. Să presupunem (după 2)), că $|K_{i,m,A}| < 1$ şi că N este finit iar f_B şi f_i, ca mai sus, sînt tipic transformabile, deci avem

$$f_{B,m}^{*}(A) \simeq f_{i,m}^{*}(A) \simeq \eta_m(A)\,[2 - \eta_m(A)].$$

Atunci, pentru distanţa între două funcţii în $C[0,1]$ metrizat cu metrica lui Cebîşev, ţinînd seama de condiţia 2) şi notînd $\eta_m = \int_0^y A^m\,dy' \Big/ \int_0^{\delta_A} A^m\,dy'$ avem

$$(3.5.2)\qquad \rho(\theta(A_1),\ \theta(A_2)) = \max_{\eta\in[0,1]} |f_{B,m}^{*}(A_1) - f_{B,m}^{*}(A_2) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} K_{i,m,A_1}[f_{i,m}^{*}(A_1) - f_{B,m}^{*}(A_1)] - \sum_{i=1}^{N} K_{i,m,A_2}[f_{i,m}^{*}(A_2) - f_{B,m}^{*}(A_2)]| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{\eta\in[0,1]} |\eta_m(A_1)\,[2 - \eta_m(A_1)] - \eta_m(A_2)\,[2 - \eta_m(A_2)]| +$$

$$+ \max_{\eta\in[0,1]} \sum_{i=1}^{N} |K_{i,m,A_1}\eta_m(A_1)\,[2 - \eta_m(A_1)] - K_{i,m,A_2}\eta_m(A_2)\,[2 - \eta_m(A_2)]|.$$

Să notăm cu K o funcţie de A astfel încît

$$(3.5.3)\quad K_{i,m,A_1}\eta_m(A_1)\,[2 - \eta_m(A_1)] - K_{i,m,A_2}\eta_m(A_2)\,[2 - \eta_m(A_2)] \leqslant$$

$$\leqslant K|\eta_m(A_1)\,[2 - \eta_m(A_1)] - \eta_m(A_2)\,[2 - \eta_m(A_2)]|;$$

atunci (3.5.2) se poate scrie:

$$(3.5.4)\quad \rho(\theta(A_1),\ \theta(A_2)) \leqslant \max_{\eta\in[0,1]} |2 - \eta_m(A_1) - \eta_m(A_2)|\,\{1 + K\} \times$$

$$\times \max_{\eta\in[0,1]} |\eta_m(A_1) - \eta_m(A_2)| = \alpha\rho(\eta_m(A_1),\ \eta_m(A_2)),$$

Scanned with OKEN Scanner

unde am notat $\alpha = (1 + K) \cdot \max_{\eta \in [0,1]} |2 - \eta_m(A_1) - \eta_m(A_2)|$. În cazul $m = 1$, din rezolvări numerice se vede că

$$|\eta_m(A_1) - \eta_m(A_2)| \ll |A_1 - A_2| \tag{3.5.5}$$

astfel că în acest caz θ este o contracție (fig. 3.5.1).

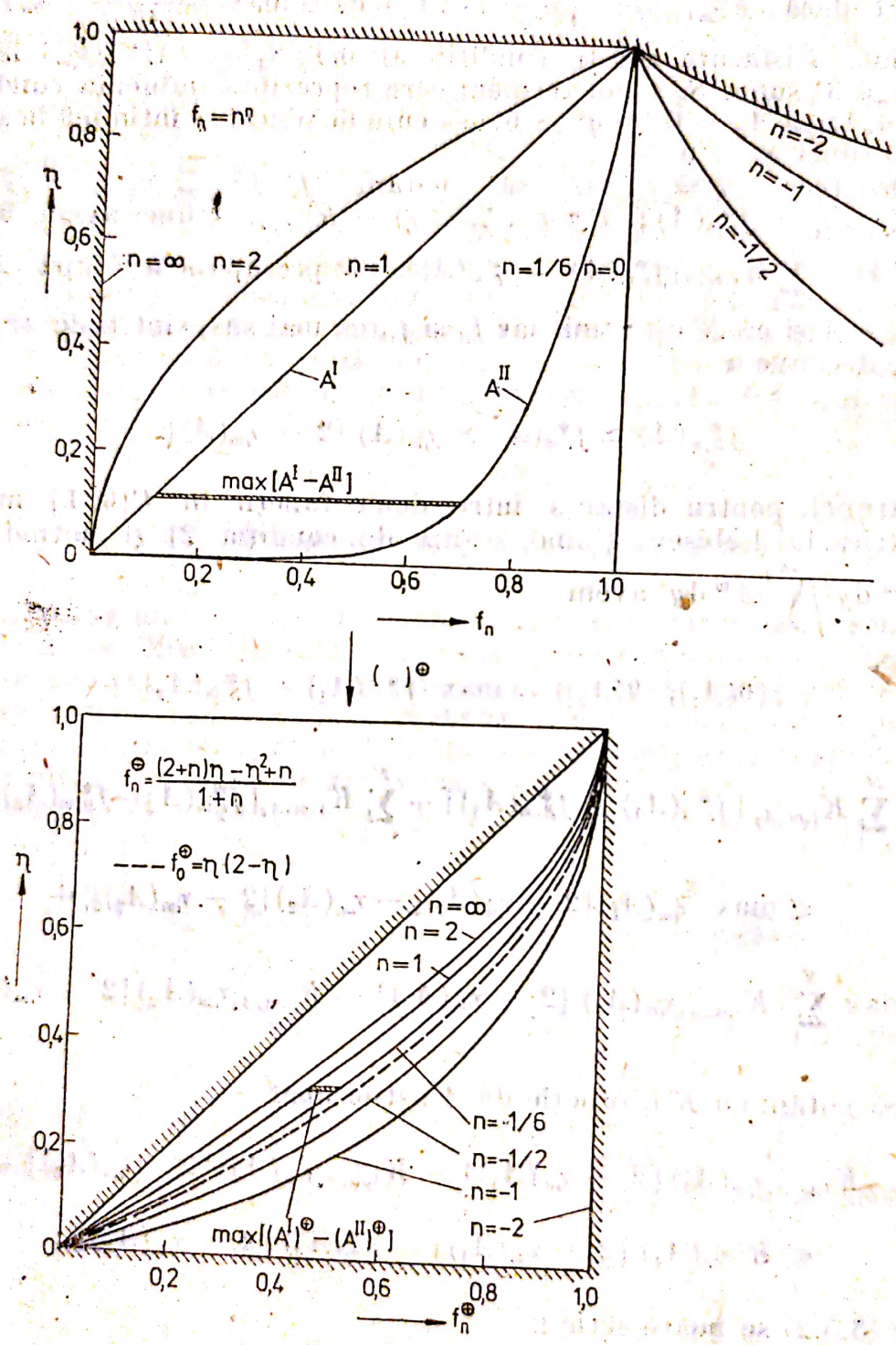


Fig. 3.5.1

Demonstrația de mai sus este valabilă cînd 1), 2), 3) au loc și cînd se poate găsi K care să satisfacă (3.5.3) De asemenea, rămîne de demonstrat riguros inegalitatea (3.5.5). În concluzie, fără a fi demonstrat riguros că θ

este o contracție chiar în cazul $m = 1$, schema de mai sus și mărginirile 1), 2), 3) care, ca și (3.5.5), par a fi satisfăcute experimental, face ca această afirmație să fie plauzibilă. De aceea, în cele ce urmează vom presupune că se poate aplica o schemă de aproximații succesive în rezolvarea ecuațiilor de tip (3.5.1), avînd drept primă aproximație $A^{(0)}_{a,m} = f^{\oplus}_{B,m}$.

Un interes practic ar prezenta un studiu riguros privind proprietatea de contracție a lui θ și pentru $\varphi(A) = \sum_{q=1}^{n} a_q A^q$ aceasta fiind după $\varphi(A) = A^m$ una din cele mai utilizate funcții ce apare în transformarea lui Săvulescu [186].

În cazul $m = 1$, φ este funcția identitate, $A = U(x, y)$, $Q_e = 0$, $A_0 = 0$, ecuația lui Prandtl (3.4.9) se scrie explicit ca

$$U_a^2 = T\left(\eta \frac{\partial U_a}{\partial \eta}\right) - \frac{2\psi_\delta^2}{\nu} U_{e\xi} U_e^{-2} \int_0^1 \eta (U_a -$$

$$- U_a^{-1})\, \mathrm{d}\eta \left[T(U_a - U_a^{-1}) - T\left(\eta \frac{\partial U_a}{\partial \eta}\right)\right]$$

în care am considerat că U_a depinde doar de $\eta = \int_0^y U(x, y)\, \mathrm{d}y \Big/ \int_0^\delta U(x, y)\, \mathrm{d}y$, $\psi_\delta = \int_0^{\delta(x)} U(x, y)\, \mathrm{d}y$, deci am luat în discuție numai soluții similare. Un procedeu de aproximații succesive ar putea începe cu U_{a0}, soluție a ecuației trunchiate

$$U_a^2 = T\left(\eta \frac{\partial U_a}{\partial \eta}\right). \tag{3.5.6}$$

Această ecuație, care este ecuația netrunchiată în cazul plăcii plane ($U_{e\xi} = 0$) și deci care corespunde ecuației lui Blasius din cazul stratului limită de grosime infinită, nu are soluții regulate [55]. Nu putem afirma deocamdată nimic despre existența unor soluții slabe ale lui (3.5.6).

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL IV

TEORIA FLUCTUAȚIILOR ÎN CURGERILE CU FRECARE

§ 4.1. Modele fenomenologice și statistice ale fluctuațiilor în mecanica fluidelor

În marea majoritate a cazurilor, în natură mișcarea fluidelor este turbulentă, existînd un consens general asupra noțiunii de turbulență. Se acceptă unanim că mișcarea turbulentă este nestaționară, tridimensională, porțiuni de fluid de diferite mărimi avînd mișcări sinuoase, complicate și dezordonate (haotice), vîrtejuri de diferite dimensiuni fiind prezente în orice mișcare turbulentă. O altă caracteristică esențială a acestei mișcări este aceea că în ea nu se pot determina experimental și nu au semnificație practică profilele instantanee de viteză, temperatură, presiune etc., ele prezentînd un caracter aleator. Indiscutabil, instabilitatea mișcării laminare duce în cele din urmă la turbulență, ea constituind, ca și celelalte caracteristici, condiții necesare, dar nu și suficiente, ca mișcarea să fie turbulentă.

O altă condiție necesară de turbulență (enunțată de Săvulescu) este neexistența unui profil instantaneu de viteze; aceasta permite stabilirea cu precizie a momentului la care într-un anumit punct din spațiul fizic mișcarea din laminară devine turbulentă. De asemenea, ea cere utilizarea unui model statistic de descriere matematică a turbulenței rezultate. Să remarcăm însă că celelalte caracteristici ale turbulenței nu exclud posibilitatea ca o descriere fenomenologică să fie, de asemenea, bună. În orice caz, un lucru rămîne cert, originea turbulenței se află la granița dintre modelarea continuă și cea discretă.

Este posibil ca, rămînînd în cadrul teoriei continuumului, anumite rezultate globale, „medii", ale curgerii să fie bine determinate, de ecuațiile Navier-Stokes. Acestea sînt momente de diferite ordine ale unor mărimi statistice. Există totuși două considerente care indică modelul statistic drept cel mai adecvat pentru descrierea dinamicității turbulenței: 1) existența fluctuațiilor (deviații locale de la mărimea medie cu caracter aleator) și a unei 2) scări proprii turbulenței. În modelul continuu nu avem de unde deduce mișcări aleatoare și deci nici fluctuații. Din păcate, însă, necunoașterea naturii fluctuațiilor (deci a mecanismelor de generare a lor) pe de o parte și a scării la care ele acționează, pe de alta, fac ca modelele statistice uzuale să nu fie în întregime adecvate descrierii turbulenței. Mai precis, dificultatea formulării unei teorii statistice a fluctuațiilor constă în aceea că în mecanica statistică avem de-a face cu un număr foarte mare de particule microscopice, natura mișcărilor lor individuale fiind bine determinată, pe cînd în mediul continuu nu se pot identifica

Scanned with OKEN Scanner

„particule" fizic determinate (o particulă fluidă de 1 mm³ conține aproximativ 10^{10} particule microscopice). Cu alte cuvinte, teoriile turbulenței trebuie bine deosebite după criteriul scopului lor calitativ : teorii explicative relative la natura fluctuațiilor (care au ca punct de pornire natura fluidului și ecuațiile de conservare) și teorii descriptive relative la estimarea mărimilor medii caracteristice fluctuațiilor și relațiile dintre ele (care au ca punct de plecare presupunerea existenței unor fluctuații aleatoare).

Cele spuse mai sus arată de ce în teoria turbulenței modelele fenomenologice coexistă cu cele statistice. Lipsa unei definiții a turbulenței se datorează faptului că pentru diferite configurații de interes practic, cu toate acestea, caracteristicile comune, determinante, suficiente pentru ca mișcarea să fie turbulentă nu sînt cunoscute. Aceasta duce la existența unei mari varietăți de teorii care explică turbulența doar pentru situații particulare.

Toate teoriile fenomenologice de mai jos au ca bază ecuațiile Navier-Stokes ale fluidelor considerate ca medii continue.

Ramificarea repetată a soluțiilor ecuațiilor Navier-Stokes (Teoria lui Landau-Hopf). Ecuațiile Navier-Stokes fiind neliniare și conținînd un parametru fizic $\mathcal{Re}$ (numărul lui Reynolds al unei scări locale) sînt de forma $\frac{du}{dt} = F(u, \mathcal{Re})$; au soluții care la un anumit $\mathcal{Re}$ se ramifică. Pentru valori mari ale lui $\mathcal{Re}$, unele soluții ale acestor ecuații, numite soluții de bază $\vec{u}$, există, sînt unice, stabile și nu depind de $\mathcal{Re}$. La valoarea $\mathcal{Re}_{cr}$, soluțiile $\vec{u}$ își pierd stabilitatea liniară în același timp cu unicitatea, astfel că pentru $\mathcal{Re} > \mathcal{Re}_{cr}$ afară de $\vec{u}$ (care de altfel există pentru orice $\mathcal{Re} > 0$), ecuațiile Navier-Stokes mai au și alte soluții $\vec{u}_1$ periodice în t, numite secundare, care depind de $\mathcal{Re}$ și care în planul $(||\vec{u}||, \mathcal{Re})$ sînt situate pe ramuri de soluții ce pornesc spre dreapta din punctul $(||\vec{u}||, \mathcal{Re}_{cr})$. La rîndul lor, soluțiile secundare se vor ramifica la $\mathcal{Re}'_{cr}$ rezultînd alte soluții $\vec{u}_2$, periodice în t cu altă perioadă decît cea a lui $\vec{u}_1$ și acest proces continuă. Drept rezultat, la un moment dat, viteza fluidului va depinde de frecvențele ω_i din ce în ce mai multor mișcări ramificate, aceste frecvențe fiind legate printr-o funcție irațională astfel că este de așteptat ca pentru timpi mari viteza să fie o funcție cvasiperiodică foarte complicată care să modeleze mișcarea haotică turbulentă (fig. 4.1.1).

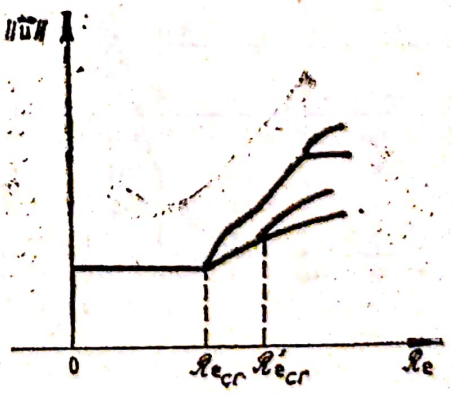


Fig. 4.1.1

În această teorie, trecerea de la mișcarea laminară la cea turbulentă se face prin mișcări, de asemenea, laminare. O astfel de tranziție este observată la mișcări de rotație și convecție. Pentru aceste clase de mișcări, turbulența apare simultan în toată mișcarea. Spre deosebire de acestea, la mișcarea pe placa plană, odată cu creșterea coordonatei x (de-a lungul plăcii în direcția curgerii) și deci a numărului lui Reynolds, mișcare trece treptat de la mișcarea laminară la cea tranzițională în care apar la început, ca urmare a instabilității mișcării de bază, perturbații sinusoidale bidimensionale care se amplifică, apoi cele tridimensionale. Salturi („spoturi") turbu-

lente, caracterizate de valori instantanee ale produsului $u'v'$ de 30 de ori mai mari decît corelaţia respectivă $\widetilde{u'v'}$, apar pentru x şi mai mari. Acestea pot fi privite ca discontinuităţi ale vitezei. La x încă şi mai mari apar zone turbulente insulate în mişcarea laminară, care se înmulţesc şi coexistă dînd caracterul fenomenologic de turbulenţă dezvoltată. Să remarcăm totuşi că această turbulenţă dezvoltată nu reprezintă calitativ o structură nouă de curgere, ci este numai o suprapunere de fenomene de scară locală şi temporală de tipul spoturilor şi intermitenţei. Această situaţie pare să fie explicată de :

Soluţiile generalizate (turbulente) ale lui J. Leray, care sînt clase de funcţii Lebesgue integrabile egale aproape peste tot şi care satisfac forma integro-diferenţială a ecuaţiilor lui Navier-Stokes. Aceste soluţii devin clasice cînd unul din reprezentanţii clasei de echivalenţă care le definesc au

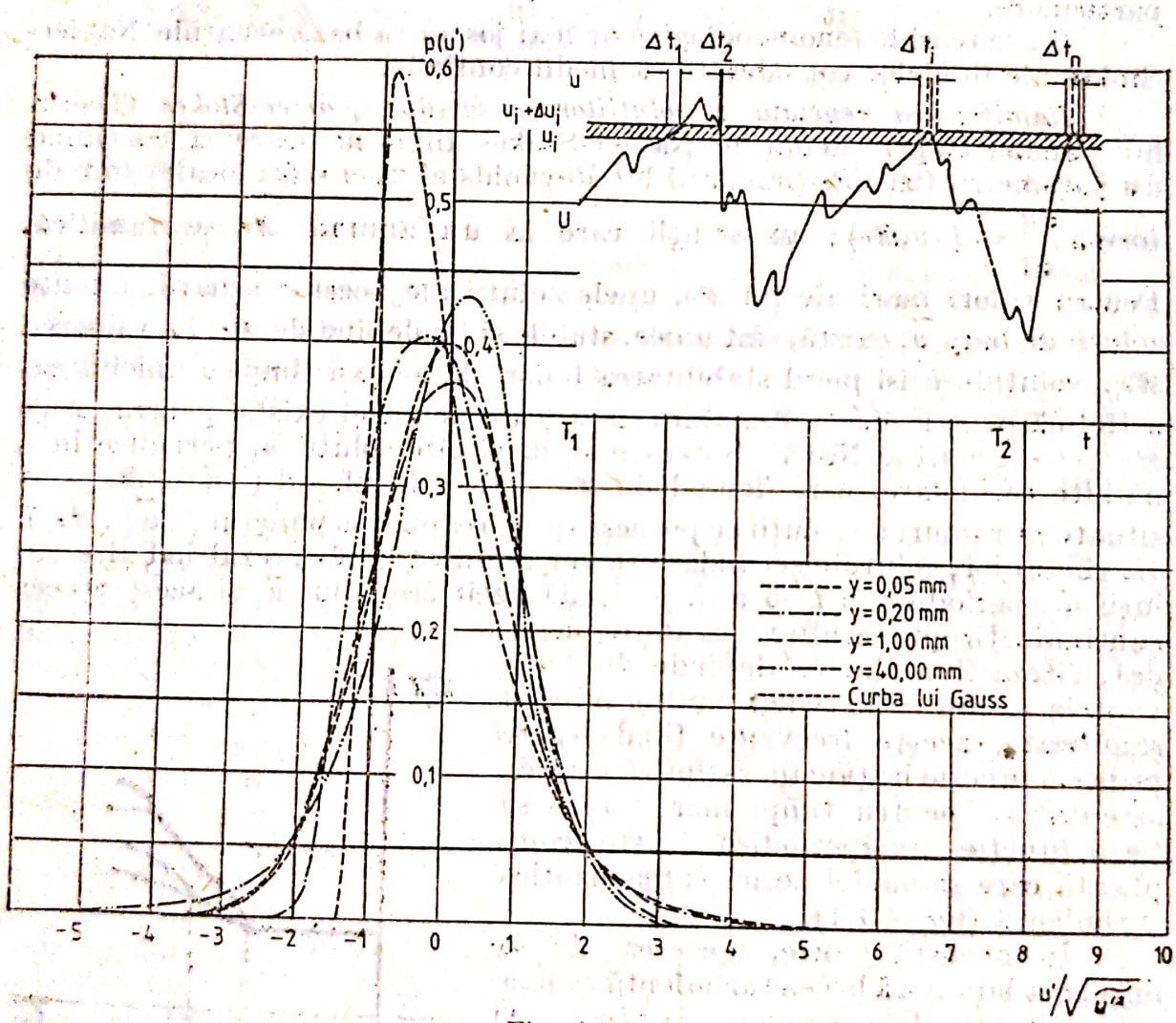


Fig. 4.1.2

suficient grad de netezime pentru a satisface ecuaţiile diferenţiale Navier-Stokes. Pentru timp mic există soluţii clasice ale ecuaţiilor Navier-Stokes care după un timp finit îşi pierd netezimea, nemaiputînd să satisfacă aceste ecuaţii sub formă diferenţială şi integro-diferenţială. Deci, după acel timp, există soluţii ale ecuaţiilor de mişcare dar puse sub formă integrală şi acestea sînt soluţiile generalizate. Măsura Hausdorff, a mulţimii momentelor în care ecuaţiile Navier-Stokes, sub formă diferenţială, nu admit soluţii (clasice), este mai mică sau egală cu 1/2 (fig. 4.1.2).

Scanned with OKEN Scanner

După unii autori, mișcarea turbulentă este mișcarea haotică a fluidelor. Dat fiind că în cazul bidimensional soluțiile clasice există pentru orice moment de timp, deci soluțiile turbulente sînt clasice și deoarece nu există demonstrații riguroase care să arate că în cazul tridimensional există soluții turbulente care nu sînt clasice, se caută modele matematice puternic haotice, legate de ecuațiile Navier-Stokes. Se crede că ecuațiile Navier-Stokes au soluții clasice pentru orice t și că informația asupra haoticității mișcării este deja în curgere. Dintre modelele matematice amintite menționăm ecuațiile lui Lorenz $\frac{d\vec{x}}{dt} = X(\vec{x})$, obținute prin trunchierea ecuațiilor lui Navier-Stokes în cazul problemei convecției lui Bénard [212].

Teoria lui Ruelle-Takens studiază dinamica haotică a ecuațiilor lui Lorenz; în această teorie turbulența mișcării este asimilată cu comportarea „eratică", haotică pentru $t \to \infty$ a soluțiilor ecuațiilor lui Lorenz care depind într-un mod sensibil de condițiile inițiale. În acest model se demonstrează deci posibilitatea variațiilor întîmplătoare pornind de la sisteme deterministe fără a se presupune mișcarea depinzînd de un număr infinit de grade de libertate (fig. 4.1.3). Cercetări recente de teoria sistemelor dinamice [16], [203] au localizat strange attractor-ul lui Lorenz punînd astfel în evidență mecanismul de apariție a proprietăților stocastice ale turbulenței.

Formularea integro-diferențială (a lui Săvulescu) a unor ecuații diferențiale de tip difuziv (în care A este mărimea care difuzează)

$$\mathscr{A}^{1+s}(\eta_s) = \mathscr{A}^{\oplus}_{B_s} + \sum F^{\oplus}_{i_s}(f^{\oplus}_{i_s} - f^{\oplus}_{B_s}), \quad 0 \leqslant \eta_s \leqslant 1 \tag{4.1.1}$$

cu notațiile din capitolul III, pune în evidență un termen fundamental $f^{\oplus}_{B_s}$ și o sumă de diferențe mici $f^{\oplus}_{i_s} - f^{\oplus}_{B_s}$ care simulează fluctuațiile. În acest fel, pornind, de asemenea, de la ecuațiile Navier-Stokes, cu ajutorul FID se poate studia regimul turbulent; caracterul aleator provenind din arbitrarietatea descompunerii din membrul drept al lui (4.1.1) (fig. 4.1.4), [202].

Teoriile turbulenței mai sus prezentate au un caracter fundamental explicativ după care apariția fluctuațiilor aleatoare rezultă numai din ecuațiile Navier-Stokes fără a face apel la mecanica statistică, deci la existența unui număr de grade de libertate infinit sau ipoteze fizice suplimentare față de cele care au stat la baza deducerii ecuațiilor menționate. Toate aceste teorii se bazează pe proprietățile calitative ale spațiului soluțiilor ecuațiilor Navier-Stokes, soluții de diferite tipuri corespunzînd diferitelor forme ale acestor ecuații. Există o altă serie de teorii ale fluctuațiilor cu caracter descriptiv, mai mult cantitativ, care adaugă la ecuațiile Navier-Stokes ipoteze asupra fluctuațiilor. Ele au la bază:

Teoria lui Reynolds, după care, orice mărime instantanee, de exemplu viteza $\vec{v}$, este descompusă într-o medie notată cu tildă $\tilde{\vec{v}}$ și o fluctuație notată cu prim $\vec{v}'$, deci $\vec{v} = \tilde{\vec{v}} + \vec{v}'$. Media poate fi temporală și atunci avem ecuațiile originale ale lui Reynolds, sau spațială, spațio-temporală, statistică. Descompunerea mărimilor instantanee în mărimi medii și fluctuații are ca rezultat introducerea unor noi necunoscute, ecuațiile Navier-Stokes nemaifiind suficiente pentru determinarea lor unică.

Scanned with OKEN Scanner

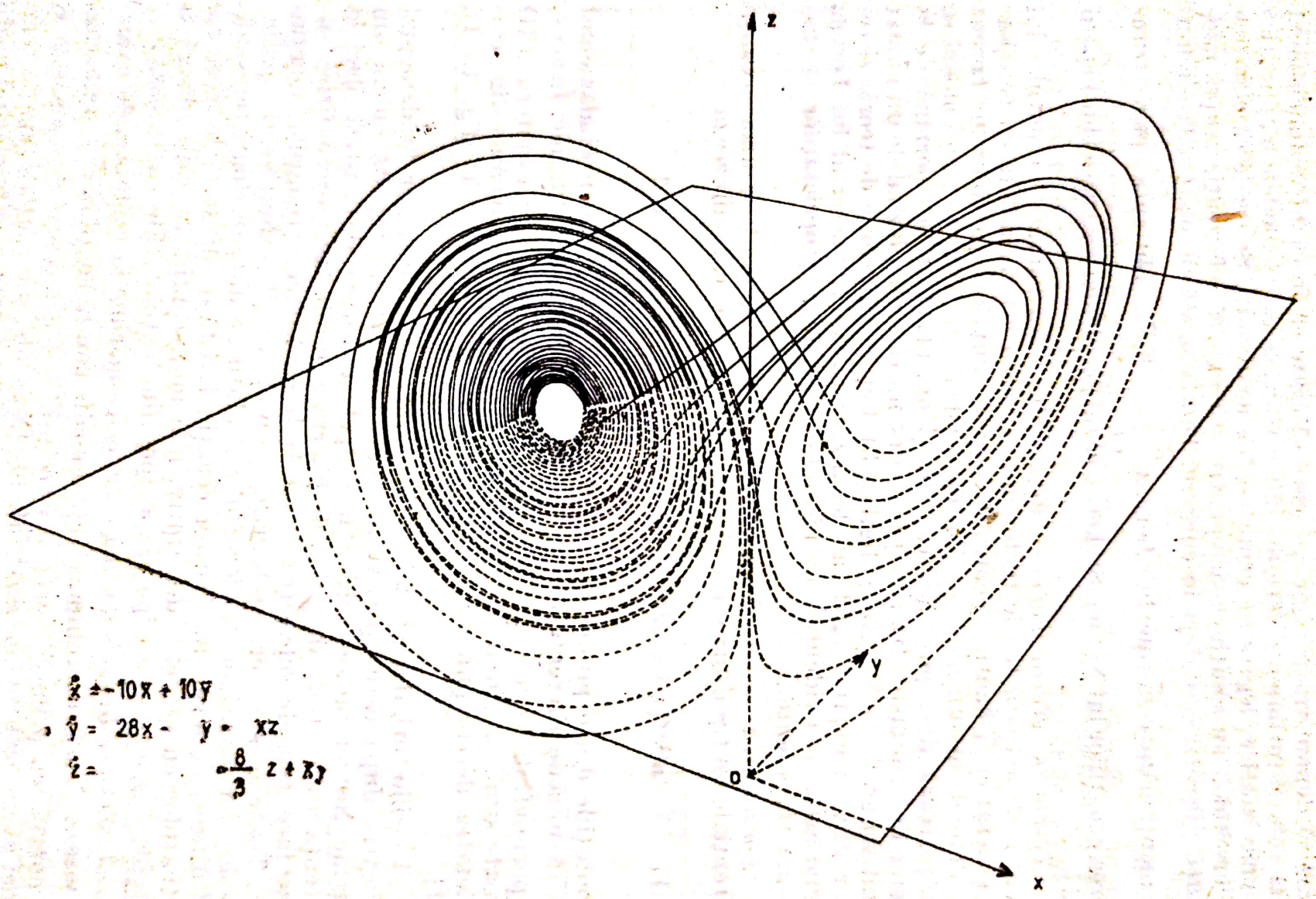


Fig. 4.1.3

Scanned with OKEN Scanner

Apare astfel necesitatea prescrierii de noi ecuaţii numite relaţii de închidere, care să fie expresia matematică a unor ipoteze fizice privind legătura dintre diferitele mărimi medii obţinute cu ajutorul produselor de fluctuaţii (corelaţii de diferite tipuri şi ordine). Sistemul obţinut nu mai este deci echivalent cu cel format din ecuaţiile de conservare a mărimilor instantanee.

Să remarcăm că toate teoriile de integrare a ecuaţiilor lui Reynolds au un caracter formal, neriguros matematic; cu ajutorul lor nu se pot obţine informaţii calitative asupra naturii fluctuaţiilor. Evaluarea canti-

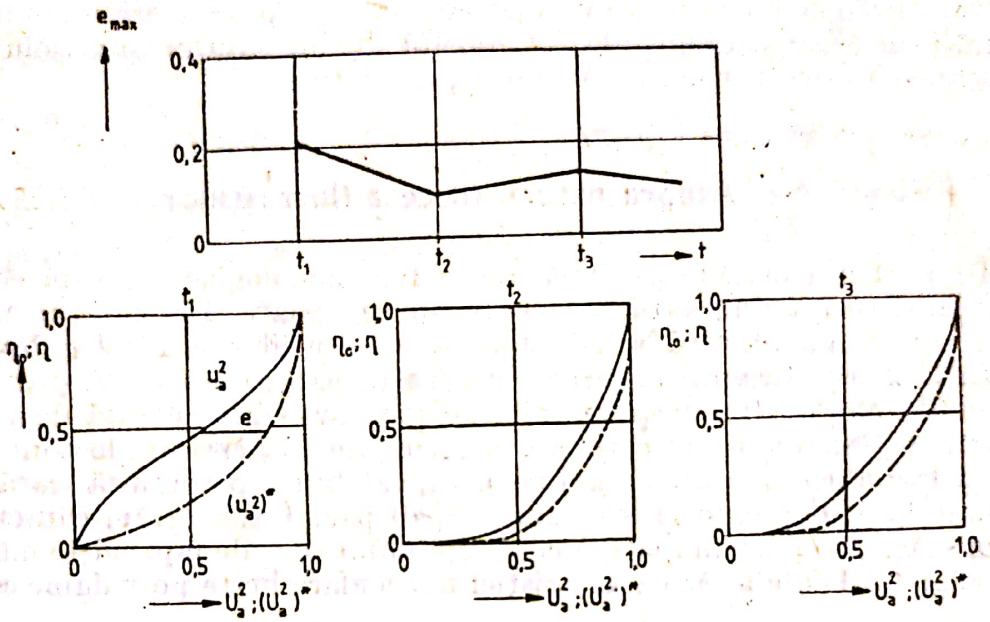


Fig. 4.1.4

tativă a mediilor şi corelaţiilor extrem de utile în aplicaţiile practice se realizează cel mai adesea prin ignorarea oricărui mecanism explicativ de generare a fluctuaţiilor, de întreţinere şi dispariţie a lor; mecanismul fundamental care le dă caracterul aleator nu apare în nici unul din modelele menţionate.

Modele fizice. Din punct de vedere fizic nu sînt cunoscute mecanisme specifice generării fluctuaţiilor în curgerile fluidelor. În cele ce urmează avansăm trei astfel de mecanisme fizic plauzibile. 1) De exemplu, pot apărea fluctuaţii datorită interacţiunii dintre fluctuaţiile la scară microscopică şi variaţiile în timp la scara continuumului. Ca urmare, funcţia de repartiţie maxwelliană (obişnuită) se modifică puţin şi mărimile mediate cu ajutorul său capătă fluctuaţii la scara continuumului [6]; 2) Pierderea succesivă a stabilităţii şi ramificările repetate (teoria lui Landau-Hopf) ale soluţiei ecuaţiilor de mişcare în funcţie de parametrul global ($\mathscr{R}e$) crescător are loc la scări din ce în ce mai mici (mişcări secundare locale) şi prezintă un aspect energetic de transfer în cascadă şi un aspect geometric extrem de complicat, astfel că generarea fluctuaţiilor aleatoare rezultă din suprapunerea unui număr extem de mare de mişcări nestaţionare de scară mică [92]; 3) Un alt mecanism posibil este cel al difuziei energiei cinetice distribuită într-o secţiune a curgerilor cu frecare [172], [178], [183]. Această difuzie se efectuează transversal pe direcţia principală de curgere, este întreţinută de gradientul transversal al vitezei medii

și are drept măsură locală diferența dintre coordonatele $\eta_0 = y/\delta$ și $\eta_2 = \int_0^y U^2 dy \Big/ \int_0^\delta U^2 \, dy$ (Cap. III). Acest mecanism este analog teoriei difuzici și poate fi numit dinamo-difuzie. Deci amplificarea unor perturbații ar duce la redistribuirea energiei medii (raportată acum la η_2), care, odată realizată, distruge perturbațiile prin atenuarea gradientului transversal de viteză. Dispariția perturbațiilor redistribuie energia pe coordonata η_0 care acum corespunde unui mare gradient transversal de viteză. Acesta, la rîndul lui, generînd perturbații și ciclul repetîndu-se, arată că datorită dinamo-difuziei se poate naște un mecanism de întreținere a unui cîmp de fluctuații, al căror caracter aleator rezultă din nedeterminarea soluțiilor instantanee locale cu condiții macroscopice date.

§ 4.2. Asupra naturii fizice a fluctuațiilor

În § 4.1 am prezentat cîteva teorii fenomenologice conform cărora natura statistică a fluctuațiilor din continuum poate fi rezultatul caracterului eratic sau al ramificării repetate a soluțiilor ecuațiilor Navier-Stokes ; în acest paragraf sugerăm că această natură statistică poate rezulta și din efectul fluctuațiilor microscopice puse în evidență de teoria lui Maxwell-Boltzmann în care caz ecuațiile de conservare ale continuumului ar trebui completate cu noi termeni, valabili la o anumită scară λ_2 a continuumului, dar care la altă scară λ_1 dispar. Într-adevăr, caracteristicile mișcării fluidelor în ipoteza continuumului sînt, de fapt, niște mărimi medii (fig. 4.2.1) ale unor caracteristici moleculare luate pe volume cores-

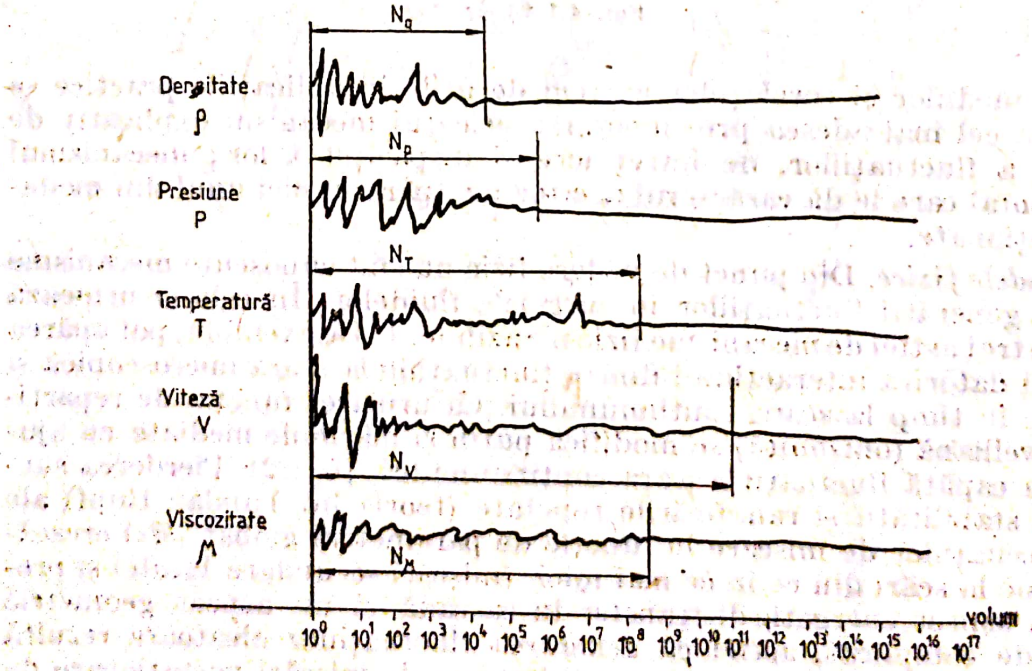


Fig. 4.2.1

punzătoare unei scări λ_2 care asigură continuitatea de un anumit ordin a acestor mărimi medii. La o scară $\lambda_1 < \lambda_2$, aceste medii prezintă fluctuații microscopice. Astfel, λ_2 trebuie aleasă drept cea mai mare scară la

care toate mărimile considerate în ecuațiile de conservare ale continuumului nu mai prezintă fluctuații microscopice.

În acest paragraf vom da motivații fizice de apariția a fluctuațiilor la scară microscopică și la scară macroscopică a continuumului. La scară microscopică fluctuațiile au ca origine mecanismul fundamental al ciocnirii microparticulelor; FID pledează pentru ideea că și la scara macroscopică mecanismul fundamental al fluctuațiilor rămîne tot ciocnirea moleculară.

Să explicăm mai întîi generarea fluctuațiilor la scară microscopică cu ajutorul teoremei H a lui Boltzmann, care afirmă că pentru starea de „haos molecular" funcția H atinge un maxim, astfel că $\frac{dH}{dt} < 0$ pentru $t = 0^+$, $\frac{dH}{dt} > 0$ pentru $t = 0^-$, iar pentru distribuția Maxwell-Boltzmann acest maxim reprezintă un minim în mulțimea tuturor celorlalte funcții de repartiție; cu H am notat $H(t) = \int f(V, t) \log f(V, t)\, dV$, $f(V, t)$ fiind funcția de repartiție în spațiul 6-dimensional, iar $dV = dV_x dV_y dV_z$ este elementul de volum în spațiul vitezelor (fig. 4.2.2).

Or, situația unui gaz se prezintă real ca o permanentă tendință spre echilibru, adică repartiția Maxwell-Boltzmann și „haos molecular", tendința alterată mereu de intervenția unor efecte macroscopice (ca îndepărtarea bruscă a unui perete al incintei, încălzirea bruscă, neomogenă, aport de masă, radiație, cîmpuri de forțe etc.). Chiar un gradient local de viteză, cum este $\frac{\partial U}{\partial y}$ lîngă perete poate constitui, în opinia noastră, o cauză a alterării echilibrului statistic.

În evoluția gazului se pot prezenta următoarele situații: 1) gazul se găsește în echilibru statistic și este îndepărtat brusc din această stare, astfel că după cîteva ciocniri el revine confirmînd teorema H; 2) gazul se găsește într-o stare în afara „haosului molecular" pe un maxim al lui H.

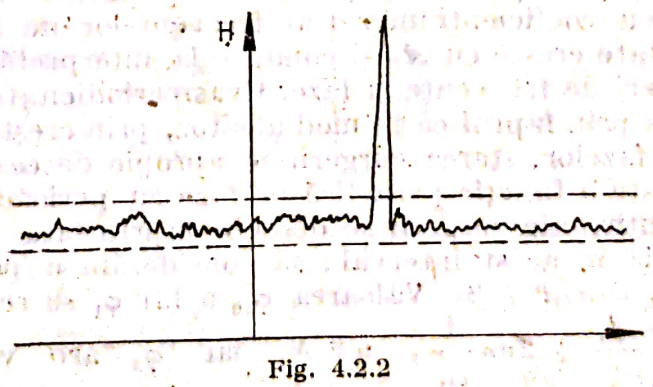


Fig. 4.2.2

Ciocnirile îl readuc spre „haos", unde are un minim, respectînd, de asemenea, teorema H. Faptul că H este funcție pară de t rezultă din forma ecuației de mișcare $mx_{tt} = f$. Deci, datorită ciocnirii și rapidității tinderii către echilibru conform teoremei H, H fluctuează între două limite și anume: minimul dat de echilibru și maximul dat de neechilibru (fig. 4.2.2). Din păcate, pentru mecanica fluidelor, în accepțiunea cvasiunanimă, inter-

valul de variaţie ΔH nu afectează proprietăţile macroscopice (continue) ale gazului, astfel că acest gen de fluctuaţii nu poate constitui o explicaţie pentru fluctuaţiile din continuum [6], [72], [93].

Pentru fluidul continuu, astfel de fluctuaţii sînt caracterizate ca „adaosuri" spontane la mărimile ce caracterizează mediul continuu. Astfel, Landau introduce fluctuaţiile în hidrodinamică, punînd adaosurile s_{ik} şi g la tensorul tensiunilor şi respectiv la transferul de căldură. Ecuaţiile hidrodinamicii capătă astfel de adaosuri şi se obţin termeni şi ecuaţii noi (despre care a fost vorba la începutul §4.1), care se prelucrează mai departe, căutîndu-se în general medii şi efecte medii. Astfel de fluctuaţii se traduc totuşi prin perturbaţii care afectează stabilitatea sistemului dinamic reprezentat de ecuaţiile de conservare. Se cunoaşte astfel un mecanism de amplificare selectivă de către profilul de viteze, conform curbei de stabilitate neutrală, [163], a perturbaţiilor infinitezimale de tip Tollmien-Schlichting $V' = \Phi(y)\, e^{i(\alpha x - \beta t)}$, $p' = p(y)\ e^{i(\alpha x - \beta t)}$, $\beta = \beta_r + i\beta_i$; teoria neliniară arată doar amplificări complicate, apariţia de noi frecvenţe, dar nimic aleator. Ilustrăm mai jos modul de formare a perturbaţiilor complicate cvasiperiodice (modelul Landau-Hopf) [213]. Să notăm cu $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$ faza perturbaţiei periodice: ea rămîne nedeterminată şi depinde esenţial de condiţiile iniţiale, astfel că β_1 este arbitrar şi reprezintă pentru mişcarea corespunzătoare un grad de libertate. Perturbaţia $\mathcal{V}' = V'(x, y, z)\, e^{-i\varphi_1 t p_1}$, considerată ca mişcare de bază, se ramifică la un $\mathcal{R}e_{cr} > \mathcal{R}e_{cr}$ şi apare astfel o perturbaţie $\mathcal{V}'' = \mathcal{V}''(x, y, z, t).\ e^{-i\omega t}$, unde $\mathcal{V}''(x, y, z, t)$ este periodică în t cu perioada $2\pi\omega_1^{-1}$, iar $\omega = \omega_2 + i\gamma_2$ care pune în evidenţă o nouă frecvenţă ω_2 şi o nouă fază $\varphi_2 = \omega_2 t + \beta_2$ cu un nou grad de libertate. Cu creşterea lui $\mathcal{R}_e$ procesul continuă şi ajungem la expresii de următorul tip pentru viteze:

$$(4.2.1) \qquad \mathcal{V}(x, y, z, t) = \sum_{p_1, \ldots, p_n} \mathcal{V}_{p_1 \ldots p_n}(x, y, z) \exp\left\{ - i \sum_{j=1}^{n} p_j \varphi_j \right\}$$

deci, la funcţii periodice de t cu n grade de libertate $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$. Cvasiperiodicitatea unei astfel de expresii apare din alegerea nedeterminată a frecvenţelor de bază $\omega_1, \ldots, \omega_n$ şi din combinaţiile liniare ale lui $\omega_j (j = 1, \ldots, n)$ cu coeficienţi întregi ai frecvenţelor de bază. Numărul gradelor de libertate creşte cu $\mathcal{R}e$ şi conduce la interpretări statistice ale acestei suprapuneri de frecvenţe şi faze. Cvasiperiodicitatea curgerii turbulente se explică prin faptul că în mod aleator, prin creşterea numărului frecvenţelor şi a fazelor, starea curgerii se apropie de cea iniţială. Într-adevăr, viteza este o funcţie periodică de faze cu perioada 2π, astfel că două situaţii identice ale curgerii se deosebesc prin faza 2π. Deosebirile importante se află în acest interval; să considerăm o pereche de faze $\varphi_1 = \omega_1 t + \beta_1$, $\varphi_2 = \omega_2 t + \beta_2$. Valoarea φ_{10} a lui φ_1 se regăseşte în momentul $t = \dfrac{\varphi_{10} - \beta_1}{\omega_1} + 2\pi n \dfrac{1}{\omega_1}$, $n \in N$, iar φ_2 are valoarea $\varphi_{20} = \dfrac{\omega_2}{\omega_1}(\varphi_{10} - \beta_1) + 2n\pi \dfrac{\omega_2}{\omega_1} + \beta_2$. Dacă extragem acum din expresia de mai sus o fază $2\pi n_1$ astfel ca $0 \leqslant \varphi_2 \leqslant 2\pi$, obţinem:

$$0 \leqslant \varphi_{20} = \frac{\omega_2}{\omega_1}(\varphi_{10} - \beta_1) + 2\pi\left(n\frac{\omega_2}{\omega_1} - n_1\right) + \beta_2 \leqslant 2\pi$$

Scanned with OKEN Scanner

o valoare situată oriunde în intervalul $(0,2\pi)$. Deci perechea φ_1, φ_2 (care este oarecare), se regăsește după un interval de timp mare (n, n_1 mari) foarte aproape de valorile inițiale φ_{10}, φ_{20}. Să remarcăm totuși diferența dintre fluctuații, prin esență aleatoare, și perturbații, prin esență determinate. Nu este deloc cunoscută vreo legătură între ele și anume, dacă o perturbație complicată (4.2.1) are aspect aleator sau ceva aparent aleator poate fi determinat, ca o perturbație. Fizic, nu există mecanism la scara continuumului care să permită punerea în evidență a unei astfel de legături.

Din datele actuale, mecanismul de generare a fluctuațiilor la scara continuumului este legat de cvasiperiodicitatea unor secvențe determinate într-un ansamblu de evenimente aleatoare, care a fost obținută în studiile asupra curgerilor cu frecare lîngă perete [13], [38], [134], adică de evenimente ce au loc în substratul vîscos de sub stratul turbulent obișnuit. Secvențele deterministe (observate) sînt : 1) ejecția (mișcarea unor particule de lîngă perete spre exterior ; 2) accelerarea unor particule de lîngă perete ; 3) năvala (inrush) unor particule spre perete ; 4) decelerarea unor particule lîngă perete. Aceste secvențe se pot ușor urmări pe figura 4.2.3 și arată trecerea particulelor de pe nivelul de distribuție a energiei $(U_a^2)(\eta_0)$ pe nivelul transformatei $(U_a^2)^*$. O reprezentare a produsului $u'v'$ tipică pentru stratul vîscos de lîngă perete dată în figura 4.2.4 permite identificarea calitativă a celor patru evenimente, după cum se remarcă și din figura 4.2.3. Avem : pentru ejecție $u' < 0$, $v' > 0$; pentru accelerare $u' > 0$, $v' > 0$; pentru năvală $u' > 0$, $v' < 0$ iar pentru decelerare $u' < 0$, $v' < 0$. Menținerea turbulenței este datorată produsului $u'v' < 0$ și aceasta este asigurată de ejecție și năvală. Caracterul aleator al apariției lor în timp

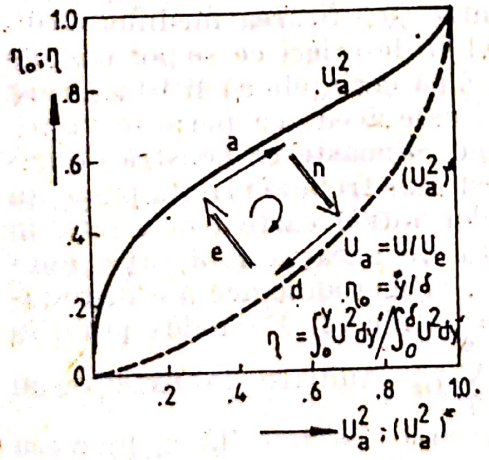


Fig. 4.2.3

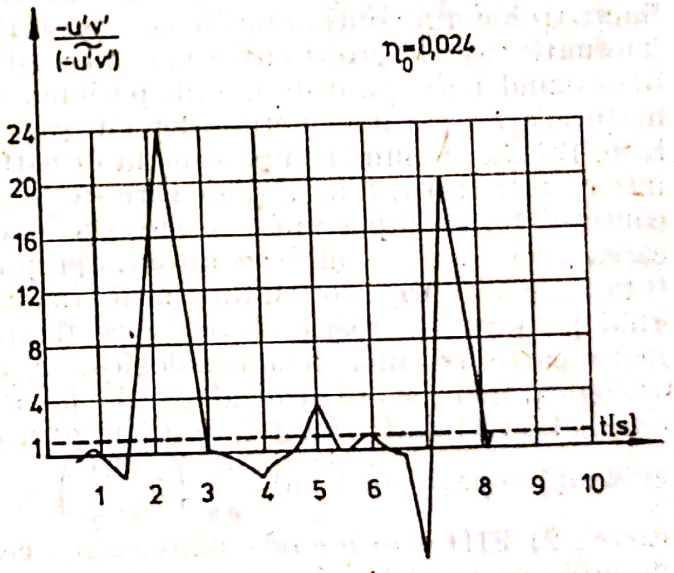


Fig. 4.2.4

și spațiu, deși formează o secvență determinată, nu este explicat teoretic. O serie întreagă de interpretări statistice [68] ale semnului lui $u'(t)$, $v'(t)$, ca de exemplu probabilitatea asociată $p(u'v')$, au arătat lucruri interesante în privința frecvenței de apariție a evenimentelor de ejecție și năvală. Cauza, însă, a apariției lor aleatoare rămîne încă un mare mister. El poate fi legat de comportarea cinetico-moleculară în prezența gradienților mari

$\frac{\partial U}{\partial y}$ lîngă perete. Dacă admitem viteza moleculară $v_{molec.}$ și grosimea unui strat limită δ, atunci avem frecvența $f = v_{molec.}/\delta$, care este foarte mare. Distanța străbătută de particule la $x = \text{const.}$ în acest interval de timp are ordinul de mărime $\Delta x \sim \frac{\delta}{v_{molec.}} \cdot U_e$, care este foarte mic. Este deci posibil ca unde transversale să micșoreze pe $\frac{\partial U}{\partial y}$ sau să „transforme" coordonata $\eta_0 = y/\delta$ în $\eta_2 = \int_0^y U^2 dy \Big/ \int_0^\delta U^2 dy$ pentru a realiza o uniformizare a energiei cinetice.

Deci, mecanismul fundamental al fluctuațiilor în continuum este tot ciocnirea moleculară care acum tinde să uniformizeze repartiția energiei cinetice $U^2(y)$ într-un strat cu mari gradienți $\frac{\partial U}{\partial y}$. Acest lucru înseamnă că, transversal pe curgere, există mișcări preferențiale ale moleculelor, sau abateri de la repartiția de echilibru Maxwell-Boltzmann, dar realizate astfel ca teorema H să fie valabilă. În continuum ele se reflectă prin transformări de coordonate, astfel că energia medie $U^2(\eta_0)$ și transformata ei $U^2(\eta_2)$ sînt realmente realizate prin unde transversale de frecvență $v_{molec.}/\delta$.

§ 4.3. Statistica fluctuațiilor

În paragraful precedent s-au analizat cîteva idei privind natura fluctuațiilor din continuum, în esență aleatoare; să descriem acum aceste fluctuații: a) cu ajutorul unor mărimi medii cît mai puține și cît mai utile; b) sesizînd maximum de detalii posibile, atît pentru obținerea de informații asupra naturii fluctuațiilor cît și pentru justificarea mediilor utilizate. Există un număr impresionant de astfel de descrieri ce se pot include într-o statistică a fluctuațiilor care să satisfacă cerințele a) și b) aparent contradictorii. Importanța acestei statistici este aceea că permite verificarea unor teorii și inițierea altora, apropiind cunoașterea noastră de natura intimă a curgerilor cu fluctuații. În acest sens trebuie privită prezența unui paragraf de teorie statistică a fluidelor într-o carte consacrată în mare parte teoriilor fenomenologice. Afară de această motivație gnoseologică, menționăm și următoarele justificări metodologice ale introducerii § 4.3: 1) statistica fluctuațiilor prin ecuațiile lui Reynolds pune în evidență ecuații de tipul $\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathscr{D}\frac{\partial A}{\partial y}\right) = \sum_1^N f_i$, studiate in extenso în carte; 2) FID este metoda matematică cea mai des folosită în lucrarea de față; ea permite găsirea de expresii explicite pentru produse de tipul $\overline{u'_i u'_j}$. Apare astfel necesitatea introducerii acestor produse, deci a unei statistici a fluctuațiilor.

La baza acestei statistici a fluctuațiilor stau înregistrările experimentale ale fluctuațiilor diverselor mărimi ca viteză, presiune, temperatură: tehnica acestor înregistrări a progresat mult în ultimul timp atît în ceea ce privește spațiul cît și timpul de rezoluție (adică volumul minim de fluid investigat și durata minimă de înregistrare). Prelucrarea acestor

Scanned with OKEN Scanner

date și interpretarea lor formează obiectul statisticii fluctuațiilor și reprezintă o parte matematică absolut necesară abordării moderne a teoriei stratului limită tranzițional sau turbulent.

Schema principală de obținere a unui ansamblu de date aleatoare prelucrate este dată în figura 4.3.1. Corecția semnalului obținut se referă,

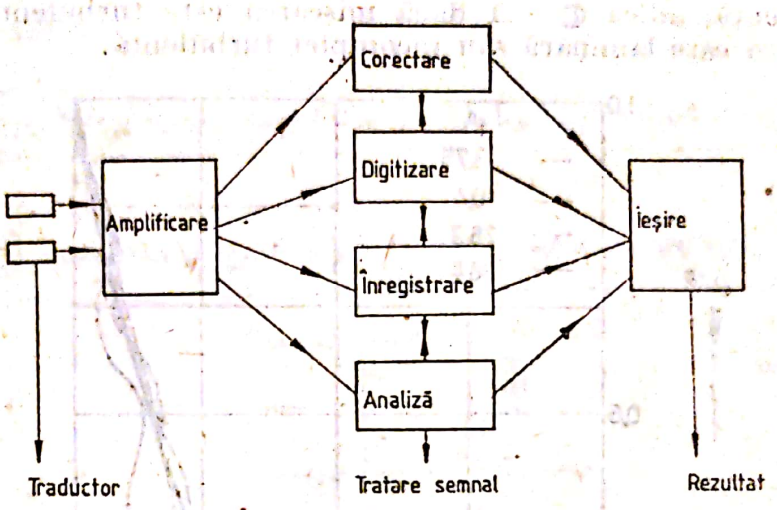


Fig. 4.3.1

de exemplu, la compunerea de frecvențe și liniarizare. Transformarea digitală a semnalului este necesară, deschizînd calea tratării lui cu ajutorul calculatoarelor. Înregistrarea modernă se referă la cartele perforate sau benzi magnetice. Analiza semnalului are un caracter complex și cuprinde: a) adunarea algebrică a două semnale $S_1 + S_2$, necesară separării, de exemplu, a fluctuațiilor componentelor vitezei: b) înmulțirea semnalului i, pentru a obține produsele $S_1 S_2$, S^2; c) medierea semnalului și integrarea: c_1) temporală $\tilde{s}_T = T^{-1}\int_0^T s(\tau)\mathrm{d}\tau$, c_2) spațială $\tilde{s}_L = L^{-1}\int_0^L s(r)\mathrm{d}r$, c_3) în probabilitate $\langle s\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma p(\sigma)\mathrm{d}\sigma$, unde $p(\sigma)$ este densitatea de probabilitate a mărimii aleatoare s cu valorile $\sigma \in (-\infty, +\infty)$ astfel că $p(\sigma) =$ $=\mathrm{prob}\,[\sigma < s < \sigma + \mathrm{d}\sigma]$; d) diferențiere în raport cu timpul $\frac{\partial s}{\partial t}$ pentru măsurarea disipației; e) filtrare (sus și jos, deci filtrare de bandă); f) determinări de probabilități (praguri) ca un semnal să se afle într-un interval prob $s \in [s_1, s_2]$; g) determinări de corelații a două semnale $\langle s_1 s_2\rangle$; h) analiza spectrală $\widetilde{s^2} = \int_0^\infty F_s(\omega)\mathrm{d}\omega$, ω este frecvența.

Să analizăm mai detaliat medierea și analiza spectrală.

Media temporală necondiționată este prin definiție $\tilde{f}_T = T^{-1}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$ sau $\tilde{f}_n = \frac{1}{nT}\int_0^{nT} f(t)\mathrm{d}t = \tilde{f}_i + \frac{1}{nT}\int_0^{nT}(f - \tilde{f}_i)\mathrm{d}t$, $(i = 1, \ldots, n)$, unde $\tilde{f}_i = \frac{1}{iT}\int_0^{iT} f(t)\mathrm{d}t$. Ea depinde în mod esențial de intervalul de integrare T, așa cum se poate vedea din figura 4.3.2.

Media temporală condiționată este prin definiție $\overline{f}_c = \int_0^T \mathbb{C} f dt \Big/ \int_0^T \mathbb{C} dt$, unde $\mathbb{C}$ este o constantă dacă o anumită condiție este verificată și este nulă dacă acea condiție nu are loc. De exemplu, într-o curgere turbulentă intermitentă se poate pune condiția ca aceea constantă să fie chiar gradul de intermitență, adică $\mathbb{C} = 1$ dacă mișcarea este turbulentă și $\mathbb{C} = 0$ dacă mișcarea este laminară sau incomplet turbulentă.

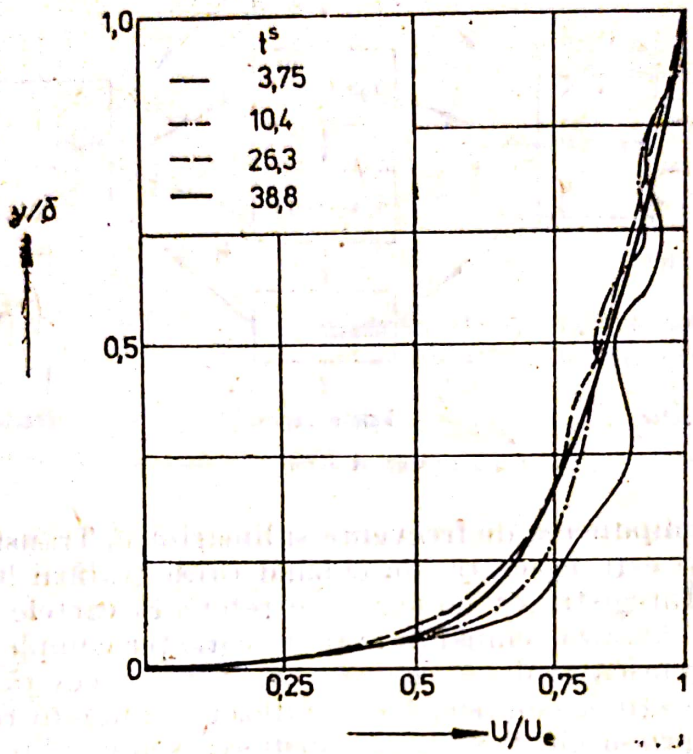


Fig. 4.3.2

Expresia matematică a mediei spațiale este analoagă celei temporale, dar rezultate de variații în spațiu se obțin mult mai greu decît cele în timp.

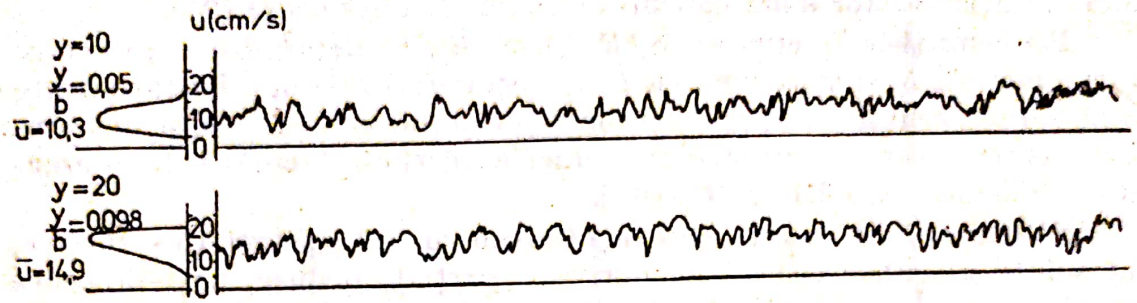
Fie acum U o variabilă aleatoare care are ansamblul de valori $(-\infty, +\infty)$ și fie densitatea de probabilitate $p(u)du = \text{prob.}\ [u < U < u + du]$; momentul de ordin k al lui U este prin definiție

$$\langle U^k \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^k p(u) du, \text{ unde } \int_{-\infty}^{+\infty} p(u) du = 1.$$

$\langle U^k \rangle$ se mai numește și media în probabilitate a lui U^k. Funcția $p(u)$ se obține dintr-un ansamblu de date $u(\vec{r}_0, t)$, unde $\vec{r}_0$ este vectorul de poziție al punctului în care s-a luat $u(t)$. Pentru ca $p(u)$ să fie reprezentativă, este necesar un mare număr de eșantioane $u_i(t)$; trebuie ca $\lim_{i \to \infty} u_i(t) = u(t)$ reprezentativ statistic, iar $u(t)$ reprezentativ statistic îndeplinește condiția de ergodicitate. De exemplu, să considerăm date înregistrările din figura 4.3.3. Se împarte ordonata în intervale Δu și numărînd intersecțiile liniei $i\Delta u = \text{const.}$ cu curba dată, se obțin histogramele din figurile 4.3.4 și 4.3.5. Din numeroasele histograme $N(u)/N_{max}$ se obține $p(u)$ prin diverse procedee de mediere ponderată. Actualmente există aparatură electronică ce efectuează aceste operații și determină astfel $p(u)$, [110], [38], [159].

O densitate de probabilitate de referință este cea gaussiană

$$p_G(u) = \frac{1}{2\pi\{\langle u^2\rangle\}^{1/2}}\, e^{-\frac{u^2}{2\langle u^2\rangle}}, \tag{4.3.1}$$



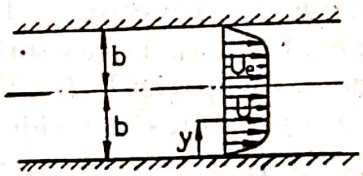


Fig. 4.3.3

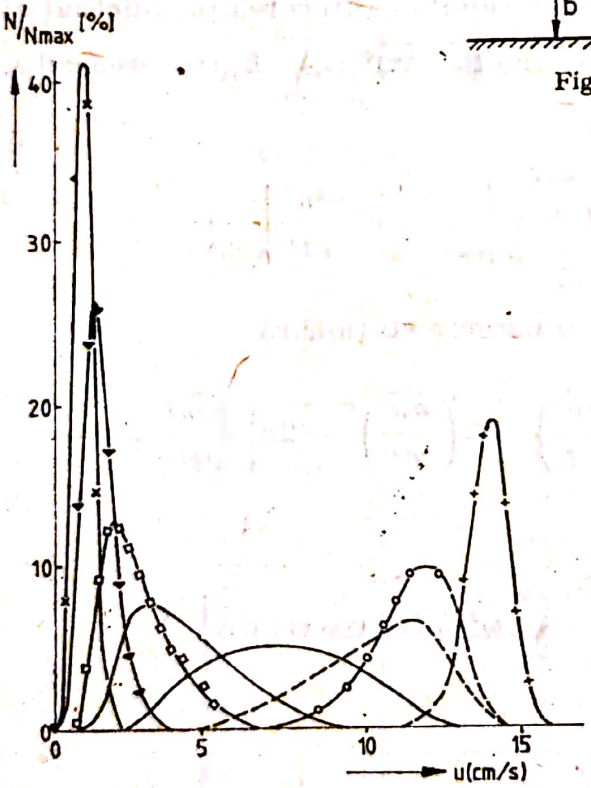


Fig. 4.3.4

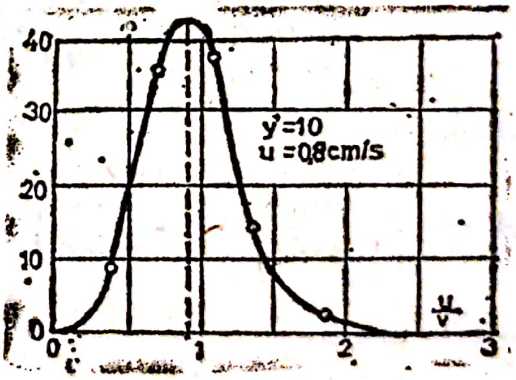


Fig. 4.3.5

unde $\langle u^2\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 p_G(u)\,du$. Momentele de ordinul k determinate cu ajutorul ei sînt

$$\langle u^l\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} u^l p_G(u)\,du = \begin{cases} 0 \text{ pentru } l = 2k+1,\ k \in N, \\ \dfrac{(2k)!}{2^k k!}\langle u^2\rangle^k \text{ dacă } l = 2k,\ k \in N. \end{cases} \tag{4.3.2}$$

Relația dintre un $p(u)$ și $p_G(u)$ se face comparînd factorul de disimetrie $S = \langle u \rangle^3 / \{\langle u^2 \rangle\}^{3/2}$ și factorul de aplatizare $F = \langle u^4 \rangle / \{\langle u^2 \rangle\}$. Pentru $p_G(u)$ avem $S_G = 0$, $F_G = 3$.

Se admite că turbulența dezvoltată se obține atunci cînd S și F se apropie de valorile gaussiene 0 și respectiv 3. În figura 4.3.6 se reprezintă variația acestor două mărimi în secțiunea unui canal [24].

Fie semnalele fluctuante $S_i(R_i\ t_i)$, $S_j(R_j,\ t_j)$ determinate respectiv în punctele R_i, R_j și la momentele t_i, t_j. Statistica fluctuațiilor turbulente arată că reprezentarea spectrală și corelațiile duble sînt suficiente, deocamdată, pentru a caracteriza structura unei curgeri cu fluctuații. Le prezentăm în tabelul nr. 4.3:1 [159], [68].

Să remarcăm că aceste cantități (tabelul nr. 4.3.1), corelații și spectre, sînt soluții ale unor ecuații cu derivate parțiale deduse, prin procedee aproximative, din ecuațiile Navier-Stokes. Determinarea lor teoretică și experimentală clarifică calitativ unele mecanisme ale curgerilor cu fluctuații, ca de exemplu prezența disipației la frecvențe mari și a energiei cinetice la frecvențe mici. De exemplu, să considerăm autocorelația fluctuației longitudinale de viteză u', $Q_{11}(\tau) = \overline{u'(t)\, u'(t+\tau)}^{*)} = \int_0^\infty E_{11}(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega$.

Avem :

$$(4.3.3) \qquad \left|\frac{\partial^2 Q_{11}}{\partial \tau^2}\right|_{\tau=0} = \overline{u'(t)\, \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}(t+\tau)}\Big|_{\tau=0} = \left| u' \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2} \right|_{\tau=0}.$$

Să observăm mai departe că pentru o curgere staționară

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\widetilde{u'^2}) = 0 = \frac{\partial}{\partial t}\left(\widetilde{2u' \frac{\partial u'}{\partial t}}\right) = 2\left(\frac{\widetilde{\partial u'}}{\partial t}\right)^2 + 2\widetilde{u' \frac{\partial^2 u'}{\partial t^2}}$$

astfel că

$$(4.3.4) \qquad \left|\frac{\partial^2 Q_{11}}{\partial \tau^2}\right|_{\tau=0} = -\left(\frac{\widetilde{\partial u'}}{\partial t}\right)^2 = \left\{-\int_0^\infty \omega^2 E_{11}(\omega) \cos \omega\tau \, d\omega\right\}_{\tau=0}$$

și prin urmare

$$(4.3.5) \qquad \left(\frac{\widetilde{\partial u'}}{\partial t}\right)^2 = \int_0^\infty \omega^2 E_{11}(\omega)\, d\omega.$$

Spre ilustrare arătăm spectrele de frecvență ale mărimilor $\widetilde{u'^2}$ și $\left(\frac{\widetilde{\partial u'}}{\partial t}\right)^2$, care indică deplasarea spre mari frecvențe a spectrului cantității $\left(\frac{\widetilde{\partial u'}}{\partial t}\right)^2$

*) Mediana temporală s-a notat fie cu tildă (~) fie cu bară (—).

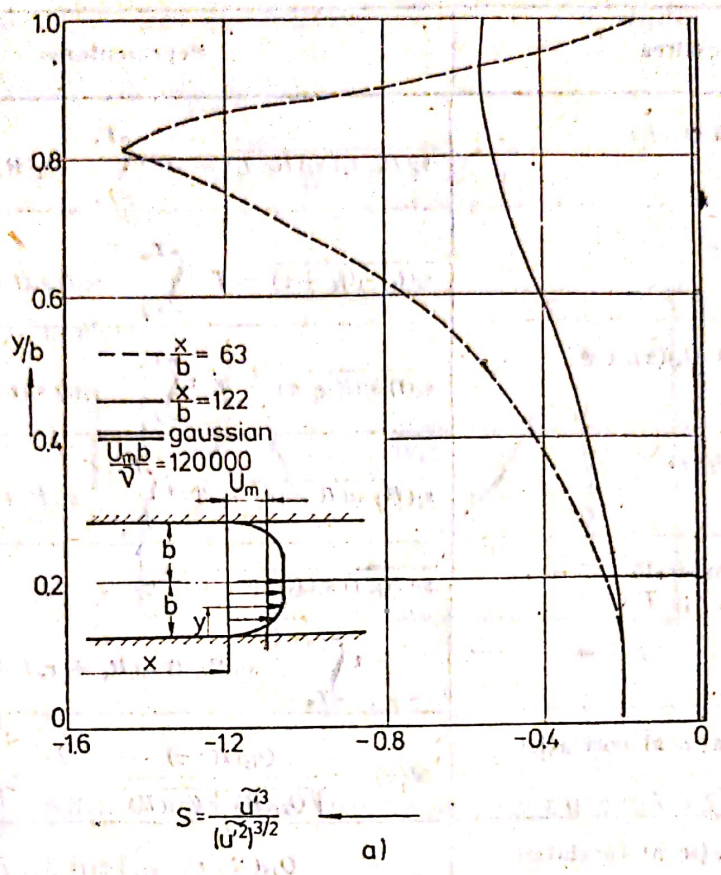


Fig. 4.3.6 a

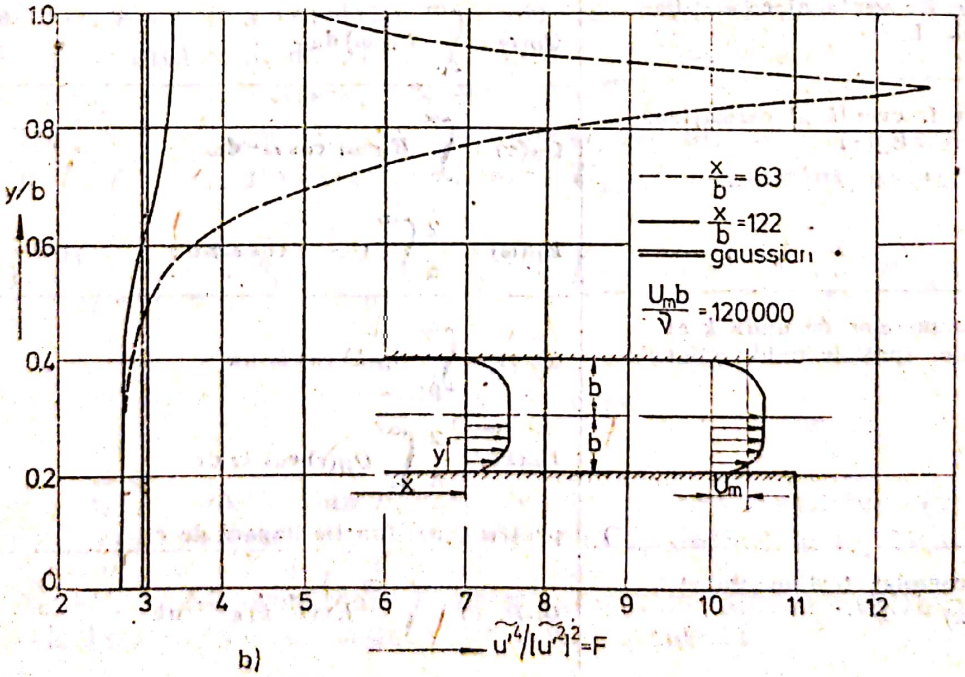


Fig. 4.3.6 b

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul nr. 4.3.1.

Denumirea	Reprezentarea
Corelația punctuală $Q_{ij}(R)$	$\overline{s_i(R_i, t_i)\, s_j(R_i, t_i)} = T^{-1}\int_{T_0}^{T_0+T} s_i(R, t) s_j(R_1 t) \mathrm{d}t$
Autocorelația $Q_{ii}(\tau)$	$\overline{s_i(t_i)\, s_i(t_i + \tau)} = T^{-1}\int_{T_0}^{T_0+T} s_i(t)\, s_i(t+\tau)\, \mathrm{d}t$
Corelație temporală $Q_{ij}(\tau)$, $i \neq j$	$\overline{s_i(t)\, s_j(t+\tau)} = T^{-1}\int_{T_0}^{T_0+T} s_i(t)\, s_j(t+\tau)\, \mathrm{d}t$
Corelație spațială $Q_{ij}(r)$	$\overline{s_i(R)\, s_j(R+r)} = T^{-1}\int_{T_0}^{T_0+T} s_i(R, t)\, s_j(R+r, t)\, \mathrm{d}t$
Corelație spațio-temporală $Q_{ij}(\vec{R}, r;\ T, \tau)$	$\overline{s_i(R_i, t)\, s_j(R_i + r, t+\tau)} =$ $= T^{-1}\int_{T_0}^{T_0+T} s_i(R_i, t)\, s_j(R_i + r, t+\tau)\, \mathrm{d}t$
Coeficient de corelație al corelației temporale $\mathscr{R}(\tau)$	$\mathscr{R}(\tau) = \dfrac{Q_{ij}(R;\tau)}{\sqrt{Q_{ii}(R)}\ \sqrt{Q_{jj}(R)}}$
Coeficient de corelație al corelației spațiale $\mathscr{R}(r)$	$\mathscr{R}(r) = \dfrac{Q_{ij}(R;r)}{\sqrt{Q_{ii}(R)}\ \sqrt{Q_{jj}(R)}}$
Spectru de frecvență al corelațiilor punctuale $E_{ij}(r)$	$Q_{ij}(r) = \int_0^\infty E_{ij}(\omega)\, \mathrm{d}\omega$
Spectru de frecvență al corelațiilor temporale $E_{ij}(\tau)$	$Q_{ij}(\tau) = \int_0^\infty E_{ij}(\omega)\ \cos \omega\tau\, \mathrm{d}\omega$ $E_{ij}(\omega) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty Q_{ij}(\tau)\ \cos \omega\tau\, \mathrm{d}\tau$
Spectrul numerelor de undă k al corelațiilor spațiale unidirecționale $E_{ij}(r)$	$Q_{ij}(r) = \int_0^\infty E_{ij}(k) \cos kr\, \mathrm{d}k$ $E_{ij}(k) = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty Q_{ij}(r) \cos kr\, \mathrm{d}r$ pentru $Q_{ij}(r)$ funcție impară de r
Spectrul complex tridimensional $E_{ij}(\vec{r}, \vec{k})$	$Q_{ij}(\vec{R}, \vec{k}) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{ij}(\vec{R}, \vec{k})\, \mathrm{e}^{i\vec{k}\,\vec{r}}\, \mathrm{d}\vec{k}$ $E_{ij}(\vec{R}, \vec{k}) = \dfrac{1}{(2\pi)^3}\int_{-\infty}^{+\infty} Q_{ij}(\vec{R}, \vec{r})\, \mathrm{e}^{-i\vec{k}\,\vec{r}}\, \mathrm{d}\vec{r}$

Scanned with OKEN Scanner

(fig. 4.3.7). Or, această cantitate este legată de disipaţie, ceea ce se vede punînd, conform ipotezei lui Taylor, $\frac{\partial u'}{\partial t} \sim U \frac{\partial u'}{\partial x}$, unde U este o viteză locală de convecţie. Avem deci

$$\left(\frac{\partial \widetilde{u'}}{\partial x}\right)^2 \simeq \frac{1}{U^2}\left(\frac{\partial \widetilde{u'}}{\partial t}\right)^2 \tag{4.3.6}$$

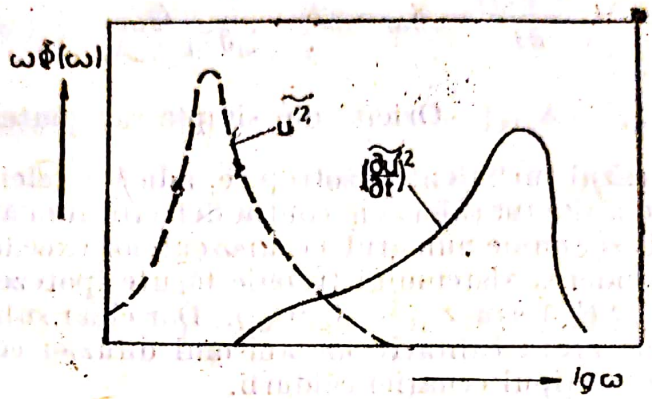


Fig. 4.3.7

şi cum $\left(\frac{\partial u'}{\partial x}\right)^2$ este o parte a disipaţiei, se observă că, local, $\left(\frac{\partial \widetilde{u'}}{\partial t}\right)^2$ caracterizează disipaţia.

Statistica fluctuaţiilor se poate dezvolta cantitativ enorm atît teoretic cît şi experimental, după cum se vede din prezentarea succintă, de mai sus, a cîtorva corelaţii şi spectre de ordinul doi. Corelaţiile de viteză de ordinul trei, de exemplu $S_{ik,j} = \overline{u'_i(R)u'_k(R)u'_j(R+r)}$ sau cele dintre presiune şi viteze, ca de pildă $K_{i,p} = \overline{u'_i(R)p'(R+r)}$, $K_{p,j} = \overline{p'(R)u'_j(R+r)}$ sînt legate de corelaţiile duble de viteză $Q_{i,j} = \overline{u'_i(R)u'_j(R+r)}$. De exemplu, pentru $U_{\text{mediu}} = \text{constant}$, avem :

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial \xi_k} S_{ik,j} + \frac{\partial}{\partial \xi_k} S_{i,kj} + \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial}{\partial \xi_i} K_{p,j} + \frac{\partial}{\partial \xi_j} K_{i,p}\right) = \tag{4.3.7}$$

$$= 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \xi_k} Q_{i,j},$$

unde $\vec{r} = \vec{i}_k \xi_k$. Aceste ecuaţii, valabile pentru curgerile turbulente incompresibile, sînt deduse din ecuaţiile Navier-Stokes prin substituţiile $u_i = U_i + u'_i$, $p = P + p'$ şi luînd $U = \text{const.}$, $P = \text{const.}$

Ecuaţia corespunzătoare pentru spectru se obţine utilizînd transformatele Fourier ale corelaţiilor sub forma generală

$$Q_{i,j} = \int_{-\infty}^{+\infty} E_{i,j}(\vec{k}, t) \exp\,[i\vec{k}\vec{\xi}]\, d\vec{k}\,; \quad S_{i,j} = \int_{-\infty}^{+\infty} F_{i,j}(\vec{k}, t) \exp\,[\vec{i}\,\vec{k}\vec{\xi}]\, d\vec{k}.$$

Pentru turbulența izotropică $k_{i,p} = \widetilde{u_i' p'} = 0$, astfel că ecuația precedentă, scrisă pentru spectru, devine

$$\frac{\partial E_{i,j}}{\partial t} = F_{i,j} - 2\nu k^2 E_{i,j} \tag{4.3.8}$$

care reprezintă transformata ecuației :

$$\frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} - S_{i,j} = 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \xi_l \partial \xi_l} Q_{i,j}, \tag{4.3.9}$$

cu $S_{i,j} = \frac{\partial}{\partial \xi_k} [S_{ij,k} - S_{i,kj}]$. Oricît de simple ar putea părea aceste ecuații, chiar în cazul turbulenței izotropice, adică a celei mai simple organizări statistice a fluctuațiilor, ele conțin defectul fundamental al ecuațiilor lui Reynolds și anume numărul necunoscutelor excede pe cel al ecuațiilor. Pentru închiderea sistemului trebuie făcute ipoteze asupra dependențelor $F_{i,j} = F_{i,j}(E_{i,j})$ sau $S_{i,j} = S_{i,j}(Q_{i,j})$. Dar chiar sub această formă nedeterminată, ele arată calitativ mecanismul difuziei corelațiilor $Q_{i,j}$ a căror ecuație este de tipul ecuației căldurii.

Statistica fluctuațiilor operînd cu medii, oricît de multe și sofisticate, este departe de a furniza informații asupra esențialului, adică ansamblul soluțiilor ecuațiilor Navier-Stokes pentru o curgere dată. Statistica acestui ansamblu al soluțiilor, care pentru incompresibil sint mărimile aleatoare $\vec{v}(\vec{r}, t)$, $p(\vec{r}, t)$ întîmpină două dificultăți majore : 1) definirea termodinamică (molecular statistică) a vitezei și presiunii ; 2) obținerea concomitentă a ansamblului de valori instantanee U_i, p. În lipsa

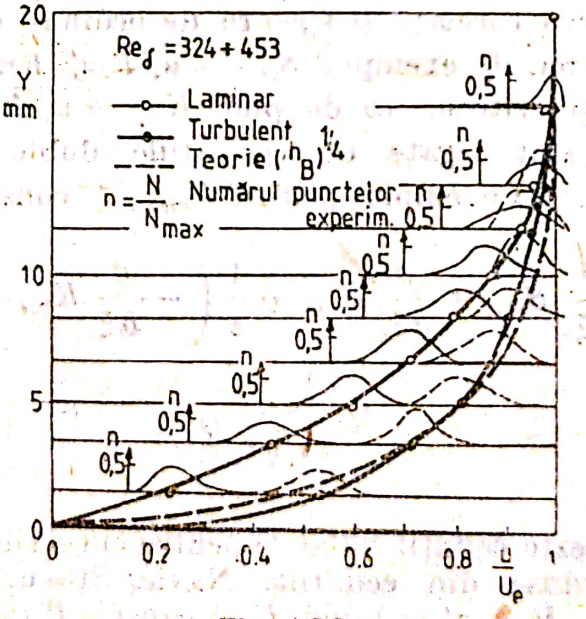


Fig. 4.3.8

unui instrument teoretic care să furnizeze acest ansamblu, experiența, condiționată de traductor, furnizează, de exemplu, ansamble de valori U. În figura 4.3.8 ilustrăm ansamble de valori ale vitezei U din stratul limită dezvoltat pe peretele unui canal [175].

Scanned with OKEN Scanner

§ 4.4. Descrierea Reynolds a cîmpului fluctuațiilor

Prin descrierea Reynolds a cîmpului fluctuațiilor vom înțelege ansamblul ecuațiilor deduse din ecuațiile Navier-Stokes prin descompunerea

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}',\ p = P + p',\ \rho = \mathrm{P} + \rho',\ \mathscr{T} = T + T';\ \mu = \tilde{\mu} + \mu'.$$

În cele ce urmează vom da cele mai generale ecuații în reprezentarea Reynolds. Avem astfel ecuația de continuitate

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{P} + \rho') + \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left[H_1H_2H_3\,\frac{(\mathrm{P} + \rho')(U_i + u_i')}{H_i}\right] = 0$$

ecuațiile impulsului

$$\frac{\partial}{\partial q_2}[H_1H_3(\tilde{\tau}_{12} + \tau_{12}')] + (\tilde{\tau}_{12} + \tau_{12}')\,H_3\frac{\partial H_1}{\partial q_2} = H_1H_2H_3(\mathrm{P} + \rho')\left[\frac{\partial}{\partial t}(U_1 + u_1') + \right.$$

$$\left. + \frac{U_i + u_i'}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}(U_1 + u_1')\right] + (\mathrm{P} + \rho')\left\{H_3(U_2 + u_2')\left[(U_1 + u_1')\frac{\partial H_1}{\partial q_2} - \right.\right.$$

$$\left. - (U_2 + u_2')\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right] + H_2(U_3 + u_3')\left[(U_1 + u_1')\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - (U_3 + u_3')\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right\} +$$

$$+ H_1H_2H_3\left[\frac{\partial(P + p')}{\partial q_1} + f_1\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}[H_2H_3(\tilde{\tau}_{11} + \tau_{11}')] - \frac{\partial}{\partial q_3}[H_1H_2(\tilde{\tau}_{31} +$$

$$+ \tau_{31}')] - (\tau_{31} + \tau_{31}')H_2\frac{\partial H_1}{\partial q_3} + (\tilde{\tau}_{22} + \tau_{22}')\,H_3\frac{\partial H_2}{\partial q_1} + (\tilde{\tau}_{33} + \tau_{33}')\,H_2\frac{\partial H_3}{\partial q_1},$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}[H_1H_3(\tilde{\tau}_{22} + \tau_{22}')] - (\tilde{\tau}_{11} + \tau_{11}')\,H_3\frac{\partial H_1}{\partial q_2} = H_1H_2H_3(\mathrm{P} +$$

$$+ \rho')\left[\frac{\partial}{\partial t}(U_2 + u_2') + \frac{U_i + u_i'}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}(U_2 + u_2')\right] + (\mathrm{P} + \rho')\left\{H_3(U_1 + \right.$$

$$\left. + u_1')\left[(U_2 + u_2')\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - (U_1 - u_1')\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right] + H_1(U_3 + u_3')\left[(U_2 + u_2')\frac{\partial H_2}{\partial q_3} - \right.\right.$$

$$\left. - (U_3 + u_3')\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right\} + H_1H_2H_3\left[\frac{\partial(P + p)}{\partial q_2} + f_2\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}[H_2H_3(\tilde{\tau}_{12} + \tau_{12}')] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial q_3}[H_1H_2(\tilde{\tau}_{23} + \tau_{23}')] - (\tilde{\tau}_{12} + \tau_{12}')\,H_3\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - (\tilde{\tau}_{32} + \tau_{32}')\,H_1\frac{\partial H_2}{\partial q_3} +$$

$$+ (\tilde{\tau}_{33} + \tau_{33}')\,H_1\frac{\partial H_3}{\partial q_3},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\partial}{\partial q_2}[H_1H_3(\tilde{\tau}_{23}+\tau'_{23})]+(\tilde{\tau}_{23}+\tau'_{23})\,H_1\frac{\partial H_3}{\partial q_2}=H_1H_2H_3(\mathrm{P}+\rho')\left[\frac{\partial}{\partial t}(U_3+u'_3)+\right.$$

$$\left.+\frac{U_i+u'_i}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}(U_3+u'_3)\right]+(\mathrm{P}+\rho')\left\{H_2(U_1+u'_1)\left[(U_3+u'_3)\frac{\partial H_3}{\partial q_1}-\right.\right.$$

$$\left.-(U_1+u'_1)\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right]+H_1(U_2+u'_2)\left[(U_3+u'_3)\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-(U_2+u'_2)\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right]\Bigg\}+$$

$$+H_1H_2H_3\left[\frac{\partial(P+p)}{\partial q_3}+f_3\right]-\frac{\partial}{\partial q_1}[H_2H_3(\tilde{\tau}_{31}+\tau'_{31})]-\frac{\partial}{\partial q_3}[H_1H_2(\tilde{\tau}_{13}+$$

$$+\tau'_{33})]-H_2\frac{\partial H_3}{\partial q_1}(\tilde{\tau}_{31}+\tau'_{31})+H_2\frac{\partial H_1}{\partial q_3}(\tilde{\tau}_{11}+\tau'_{11})+H_1\frac{\partial H_2}{\partial q_3}(\tilde{\tau}_{22}+\tau'_{22}).$$

Ecuaţia energiei scrisă pentru entalpia $C_p\mathscr{T}$ este :

$$\frac{1}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{1}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}(T+T')\right]=\frac{C_p}{\lambda}(\mathrm{P}+\rho')\left[\frac{\partial}{\partial t}(T+T')+\right.$$

$$\left.\frac{1}{H_i}(U_i+u'_i)\frac{\partial}{\partial q_i}(T+T')\right]-\frac{1}{\lambda}\left[\frac{\partial}{\partial t}(P+p')+\frac{U_i+u'_i}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}(P+p')\right]-$$

$$-\frac{q}{\lambda}-\frac{1}{\lambda}\left\{\frac{(\tilde{\tau}_{11}+\tau'_{11})}{H_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(U_1+u'_1)+(U_2+u'_2)\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\right.\right.$$

$$+(U_3+u'_3)\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\Big]+\frac{(\tilde{\tau}_{22}+\tau'_{22})}{H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(U_2+u'_2)+(U_1+u'_1)\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\right.$$

$$\left.+(U_3+u'_3)\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right]+\frac{(\tilde{\tau}_{33}+\tau'_{33})}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}(U_3+u'_3)+(U_1+u'_1)\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}+$$

$$+(U_2+u'_2)\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\Big]+\frac{\tilde{\tau}_{12}+\tau'_{12}}{H_1H_2}\left[H_1\frac{\partial}{\partial q_2}(U_1+u'_1)-(U_1+u'_1)\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\right.$$

$$+H_2\frac{\partial}{\partial q_1}(U_2+u'_2)-(U_2+u'_2)\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\Big]+\frac{\tilde{\tau}_{13}+\tau'_{13}}{H_1H_3}\left[H_1\frac{\partial}{\partial q_3}(U_1+u'_1)-\right.$$

$$-(U_1+u'_1)\frac{\partial H_1}{\partial q_3}+H_3\frac{\partial}{\partial q_1}(U_3+u'_3)-(U_3+u'_3)\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\Big]+$$

$$+\frac{\tilde{\tau}_{23}+\tau'_{23}}{H_2H_3}\left[H_2\frac{\partial}{\partial q_3}(U_2+u'_2)-(U_2+u'_2)\frac{\partial H_2}{\partial q_3}+\right.$$

$$\left.\left.+H_3\frac{\partial}{\partial q_2}(U_3+u'_3)-(U_3+u'_3)\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right]\right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$\tilde{\tau}_{11} + \tau'_{11} = 2(\tilde{\mu} + \mu') \left\{ -\frac{1}{3} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} (U_i + u'_i) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} (U_1 + u'_1) + \frac{U_2 + u'_2}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{U_3 + u'_3}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \right\},$$

$$\tilde{\tau}_{22} + \tau'_{22} = 2(\tilde{\mu} + \mu') \left\{ -\frac{1}{3} \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial q_i} \left[\frac{H_1 H_2 H_3}{H_i} (U_i + u'_i) \right] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (U_2 + u'_2) + \frac{U_3 + u'_3}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{U_1 + u'_1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial q_1} \right\},$$

$$\tilde{\tau}_{33} + \tau'_{33} = 2(\tilde{\mu} + \mu') \left\{ -\frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{H_1 H_2 H_3} (U_i + u'_i) \right] + \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} (U_3 + u'_3) + \right.$$

$$\left. + \frac{U_1 + u'_1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{U_2 + u'_2}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right\},$$

$$\tilde{\tau}_{12} + \tau'_{12} = (\tilde{\mu} + \mu') \left[\frac{H_2}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{U_2 + u'_2}{H_2} \right) + \frac{H_1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{U_1 + u'_1}{H_1} \right) \right],$$

$$\tilde{\tau}_{13} + \tau'_{13} = (\tilde{\mu} + \mu') \left[\frac{H_1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{U_1 + u'_1}{H_1} \right) + \frac{H_3}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{U_3 + u'_3}{H_3} \right) \right],$$

$$\tilde{\tau}_{23} + \tau'_{23} = (\tilde{\mu} + \mu') \left[\frac{H_3}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{U_3 + u'_3}{H_3} \right) + \frac{H_2}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{U_2 + u'_2}{H_2} \right) \right].$$

Din ecuația de conservare a impulsului obținem ecuația energiei cinetice

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2} \rho \mathscr{V}^2 = E + e'$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2} [H_1 H_3 (\tilde{\tau}_{i2} + \tau'_{i2}) (U_i + u'_i)] - H_1 H_2 H_3 \left\{ \left[\frac{\tilde{\tau}_{11} + \tau'_{11}}{H_1} \cdot \frac{U_2 + u'_2}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \right. \right.$$

$$+ \frac{\tilde{\tau}_{22} + \tau'_{22}}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} (U_2 + u'_2) + \frac{\tilde{\tau}_{33} + \tau'_{33}}{H_3} \frac{U_2 + u'_2}{H_2} \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \Big] +$$

$$+ \frac{\tilde{\tau}_{12} + \tau'_{12}}{H_1 H_2} \left[H_1 \frac{\partial}{\partial q_2} (U_1 + u'_1) - (U_1 + u'_1) \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \right] +$$

$$\left. + \frac{\tilde{\tau}_{23} + \tau'_{23}}{H_2 H_3} \left[H_3 \frac{\partial}{\partial q_2} (U_3 + u'_3) - (U_3 + u'_3) \frac{\partial H_3}{\partial q_2} \right] \right\} =$$

Scanned with OKEN Scanner

$$= H_1H_2H_3\left[\frac{\partial}{\partial t}(E+e')+\frac{U_i+u_i'}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}(E+e')\right]+$$

$$+(E+e')\frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_i}(U_i+u_i')\right]+H_1H_2H_3\left[\frac{U_i+u_i'}{H_i}\frac{\partial}{\partial q_i}(P+p')-\right.$$

$$\left.-\vec{f}\vec{\mathscr{V}}\right]+H_1H_2H_3\left\{\frac{\tilde{\tau}_{11}+\tau_{11}'}{H_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(U_1+u_1')+\frac{U_3+u_3'}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right]+\right.$$

$$+\frac{\tilde{\tau}_{22}+\tau_{22}'}{H_2}\left[\frac{U_1+u_1'}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\frac{U_3+u_3'}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right]+\frac{\tilde{\tau}_{33}+\tau_{33}'}{H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(U_3+\right.$$

$$\left.+u_3')+\frac{U_1+u_1'}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right]+\frac{\tilde{\tau}_{12}+\tau_{12}'}{H_1H_2}\left[H_2\frac{\partial}{\partial q_1}(U_2+u_2')-\right.$$

$$\left.-(U_2+u_2')\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right]+\frac{\tilde{\tau}_{13}+\tau_{13}'}{H_1H_3}\left[H_1\frac{\partial}{\partial q_3}(U_1+u_1')+H_3\frac{\partial}{\partial q_1}(U_3+u_3')-\right.$$

$$\left.-(U_3+u_3')\frac{\partial H_3}{\partial q_1}-(U_1+u_1')\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right]+\frac{\tilde{\tau}_{23}+\tau_{23}'}{H_2H_3}\left[H_2\frac{\partial}{\partial q_3}(U_2+u_2')-\right.$$

$$\left.\left.-(U_2+u_2')\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right]\right\}-\frac{\partial}{\partial q_1}[H_2H_3(\tilde{\tau}_{i1}+\tau_{i1}')(U_i+u_i')]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial q_3}[H_1H_2(\tilde{\tau}_{i3}+\tau_{i3}')(U_i+u_i')].$$

Să remarcăm că atît τ_{ij}' cît și e' sînt fluctuații de ordin superior, astfel că $\tilde{\tau}_{ij}' \neq 0$, $\tilde{e}' \neq 0$. Ecuațiile de mai sus formează baza pentru diferitele formulări ale ecuațiilor Reynolds care pun în evidență ecuații ale mărimilor medii sau ale fluctuațiilor.

Ecuațiile de mai sus păstrează forma tipică originală a ecuațiilor de conservare, ele putînd fi scrise sub forma :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_Q)_j=\frac{\partial}{\partial t}(\rho Q)+\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j\rho Q)-f(Q), \tag{4.4.1}$$

unde Q este cantitatea ce se transportă în fluid (densitatea ρ, impulsul U etc.), $f(Q)$ este sursa de producere a lui Q (forțe masice, surse de căldură, de masă etc.), $(\tau_Q)_j$ reprezintă transportul molecular al cantității Q pe direcția j; $(\tau_Q)_j$ depinde într-un mod complicat de Q, ρ, u_j și de alte constante fizice ale agitației moleculare. El se poate exprima, pentru o clasă de curgeri, printr-o relație liniară de tip gradient.

$$(\tau_Q)_j=\rho\nu_{Q_j}\frac{\partial Q}{\partial x_j}-\pi_{Q_j}, \tag{4.4.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ν_{Q_j} și π_{Q_j} exprimă proprietăți fizice ale transportului molecular local. În coordonate carteziene, ecuația (4.4.1) în care s-a introdus ecuația constitutivă (4.4.2) se scrie ca

$$(4.4.3)\quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu_{Q_j}\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho Q)\right]=\frac{\partial}{\partial t}(\rho Q)+\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j\rho Q)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\pi_{Q_j})-f(Q).$$

Pentru a ilustra procesul de obținere a ecuațiilor lui Reynolds, vom simplifica (4.4.3), considerînd mărimile instantanee $\rho Q=\mathscr{A}(t,\ x,\ y)$. Atunci

$$(4.4.4)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_{\mathscr{A}}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial y}\right)=\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\mathscr{A})+\frac{\partial}{\partial y}(v\mathscr{A})+\left(\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x}\right)_{\mathscr{A}}.$$

Să punem $\nu_A=\text{const.}$, $\mathscr{A}=A+a'$, $u=U+u'$, $v=V+v'$, $\mathscr{P}=P+p'$. Mediind (4.4.4) prin operații algebrice obținem: ecuația mărimii medii A

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial y}-\widetilde{v'a'}\right)=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(UA)+\frac{\partial}{\partial y}(VA)+\frac{\partial}{\partial x}(P+\widetilde{u'a'}),$$

ecuația mărimii instantanee a'

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_A\frac{\partial a'}{\partial y}\right)=\frac{\partial a'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Ua'+u'A+u'a'-\widetilde{u'a'})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(Va'+v'A+v'a'-\widetilde{v'a'})+\frac{\partial p'}{\partial x}$$

care mediată, deoarece $\widetilde{a'}=\widetilde{u'}=\widetilde{v'}=\widetilde{p'}=0$, este identic satisfăcută; ecuația mărimii mediate $\widetilde{a'^2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_A\frac{\partial\widetilde{a'^2}}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{a'^2})+\frac{\partial}{\partial x}(U\widetilde{a'^2})+\frac{\partial}{\partial y}(V\widetilde{a'^2})+\widetilde{a'^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+$$

$$+2a'\frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x}+2a'\widetilde{u'}\frac{\partial A}{\partial x}+2a'\widetilde{v'}\frac{\partial A}{\partial y}+2Aa'\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)}+$$

$$+2\nu_A\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right)^2}+2a'\overline{\frac{\partial}{\partial x}(u'a')}+\overline{2a'\frac{\partial}{\partial y}(v'a')}$$

Scanned with OKEN Scanner

unde ν_{Q_j} și π_{Q_j} exprimă proprietăți fizice ale transportului molecular local. În coordonate carteziene, ecuația (4.4.1) în care s-a introdus ecuația constitutivă (4.4.2) se scrie ca

$$(4.4.3)\quad \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\nu_{Q_j}\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho Q)\right]=\frac{\partial}{\partial t}(\rho Q)+\frac{\partial}{\partial x_j}(u_j\rho Q)+\frac{\partial}{\partial x_j}(\pi_{Q_j})-f(Q).$$

Pentru a ilustra procesul de obținere a ecuațiilor lui Reynolds, vom simplifica (4.4.3), considerînd mărimile instantanee $\rho Q=\mathscr{A}(t,\ x,\ y)$. Atunci

$$(4.4.4)\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_{\mathscr{A}}\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial y}\right)=\frac{\partial\mathscr{A}}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\mathscr{A})+\frac{\partial}{\partial y}(v\mathscr{A})+\left(\frac{\partial\mathscr{P}}{\partial x}\right)_{\mathscr{A}}.$$

Să punem $\nu_A=\text{const.}$, $\mathscr{A}=A+a'$, $u=U+u'$, $v=V+v'$, $\mathscr{P}=P+p'$. Mediind (4.4.4) prin operații algebrice obținem: ecuația mărimii medii A

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial A}{\partial y}-\widetilde{v'a'}\right)=\frac{\partial A}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(UA)+\frac{\partial}{\partial y}(VA)+\frac{\partial}{\partial x}(P+\widetilde{u'a'}),$$

ecuația mărimii instantanee a'

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_A\frac{\partial a'}{\partial y}\right)=\frac{\partial a'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Ua'+u'A+u'a'-\widetilde{u'a'})+$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(Va'+v'A+v'a'-\widetilde{v'a'})+\frac{\partial p'}{\partial x}$$

care mediată, deoarece $\widetilde{a'}=\widetilde{u'}=\widetilde{v'}=\widetilde{p'}=0$, este identic satisfăcută; ecuația mărimii mediate $\widetilde{a'^2}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_A\frac{\partial\widetilde{a'^2}}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{a'^2})+\frac{\partial}{\partial x}(U\widetilde{a'^2})+\frac{\partial}{\partial y}(V\widetilde{a'^2})+\widetilde{a'^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}\right)+$$

$$+2a'\frac{\widetilde{\partial p'}}{\partial x}+2\widetilde{a'u'}\frac{\partial A}{\partial x}+2\widetilde{a'v'}\frac{\partial A}{\partial y}+2Aa'\overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x}+\frac{\partial v'}{\partial y}\right)}+$$

$$+2\nu_A\overline{\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right)^2}+2a'\overline{\frac{\partial}{\partial x}(u'a')}+2a'\overline{\frac{\partial}{\partial y}(v'a')}$$

ecuația mărimii mediate $\widetilde{a'^n}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu_A \frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{a'^n})\right] = \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{a'^n}) + \frac{\partial}{\partial x}(U\widetilde{a'^n}) + \frac{\partial}{\partial y}(V\widetilde{a'^n}) + \overline{na'^{n-1}\frac{\partial p'}{\partial x}} +$$

$$+ (n-1)\,\widetilde{a'^n}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \overline{nAa'^{n-1}\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right)} +$$

$$+ \overline{na'^{n-1}\left(u'\frac{\partial A}{\partial x} + v'\frac{\partial A}{\partial y}\right)} + n(n-1)\,\nu_A\overline{a'^{n-2}\left(\frac{\partial a'}{\partial y}\right)^2} - n\overline{a'^{n-1}}\left[\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{u'a'}) +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{v'a'})\right] + n\overline{a'^n\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right)} + \overline{u'\frac{\partial}{\partial x}(a'^n)} + \overline{v'\frac{\partial}{\partial y}(a'^n)}$$

și ecuația corelației $\widetilde{a'b'}$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\nu\frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{a'b'})\right] = \frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{a'b'}) + 2\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right)\widetilde{a'b'} +$$

$$+ U\frac{\partial}{\partial x}(\widetilde{a'b'}) + V\frac{\partial}{\partial y}(\widetilde{a'b'}) + \overline{\left(\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y}\right)(b'A + a'B + 2a'b')} +$$

$$+ \overline{u'\left[b'\frac{\partial A}{\partial x} + a'\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}(a'b')\right]} + \overline{v'\left[b'\frac{\partial A}{\partial y} + a'\frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y}(a'b')\right]} +$$

$$+ \overline{b'\frac{\partial p'}{\partial x}} + \overline{a'\frac{\partial p'}{\partial y}} + 2\nu\overline{\frac{\partial a'}{\partial y}\frac{\partial b'}{\partial y}}$$

obținută cu ajutorul unei ecuații de același tip $\left(\nu_A \to \nu_B = \nu_Q;\ \left(\frac{\partial \mathscr{P}}{\partial x}\right)_B = \frac{\partial \mathscr{P}}{\partial y}\right)$ pentru mărimea $\mathscr{P} = B + b'$ și a ecuației pentru b'.

Ecuațiile lui Reynolds se pot utiliza [224], [175] pentru determinarea cîmpului de curgere medie ($\vec{V}$, P, $\widetilde{u_i'u_j'}$) prin introducerea unor relații fenomenologice $\widetilde{u_i'u_j'} = f_{ij}\left(U_i, \frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)$, $(i, j = 1, 2, 3)$, care să permită fie rezolvarea directă a ecuației mărimilor medii V, P, fie rezolvarea completă a ecuației pentru V, P și a celor pentru $\widetilde{u_i'u_j'}$. În coordo-

nate carteziene pentru fluide incompresibile obținem

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}\ ;\ \frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0,$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{u_i = U_i + u_i',\ p = P + p'}\ ,$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x_i} = \nu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_j}(\overline{u'_i u'_j})\ ;\ \frac{\partial U_j}{\partial x_j} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\overline{u'_i u'_j}) + U_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u'_i u'_j}) + \overline{u'_k u'_j}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u'_k u'_i}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} -$$

$$- \frac{1}{\rho}\overline{p'\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}\right)} + 2\nu\overline{\left(\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}\right)} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left[\nu\frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u'_i u'_j}) - \overline{u'_i u'_j u'_k} -\right.$$

$$\left. - \overline{\frac{p'}{\rho}(\delta_{jk}u'_i + \delta_{ik}u'_j)}\right];\ \frac{\partial u'_j}{\partial x_j} = 0.$$

§ 4.5. Descrierea cîmpului fluctuațiilor printr-o formulare integro-diferențială a ecuațiilor Navier-Stokes

Descrierea Reynolds a cîmpului fluctuațiilor aparține esențial metodei perturbațiilor, introduse *a priori* în ecuațiile de mișcare. Există și formulări ale ecuațiilor Navier-Stokes care permit o descompunere *a posteriori* în mișcare medie și adaosuri fluctuante, făcîndu-se în acest mod un prim pas către o teorie explicativă a fluctuațiilor în continuum (§4.1). O astfel de formulare, adaptată mai bine cazurilor cu frecare (cele care presupun existența unui profil de viteze cu gradient transversal important) este FID elaborată de Săvulescu și analizată în multe lucrări [170], [171], [178], [179], [181], [184].

În capitolul III, cu ajutorul FID, problema inițială și la limită pentru ecuațiile Navier-Stokes se poate scrie echivalent cu

$$(4.5.1)\quad \int_0^{\eta_\varphi} \varphi(\mathscr{A}_1)\,\mathrm{d}\mathscr{A}_1 = \left(\frac{f_B}{\varphi}\right)^{\oplus}\int_0^1 \varphi(\mathscr{A}_1)\,\mathrm{d}\mathscr{A}_1 + \left|\varphi\frac{\partial \mathscr{A}_1}{\partial \eta_\varphi}\right|\left[\eta_\varphi - \left(\frac{f_B^1}{\varphi}\right)^{\oplus}\right] +$$

$$+ \psi_\delta^2 \sum \left(\frac{f_i^1}{\varphi}\right)_1^{\oplus}\left[\left(\frac{f_i'}{\varphi}\right)^{\oplus} - \left(\frac{f_B^1}{\varphi}\right)^{\oplus}\right]$$

care se poate pune și sub forma $\left(\int_0^{\eta} \varphi(\mathscr{A}_1)\,\mathrm{d}\mathscr{A}_1 = \mathscr{A} - \mathscr{A}_0\,;\ f^1/\varphi = f\,;\ \eta_\varphi = \eta\right)$

$$(4.5.1')\quad \mathscr{A}_a = \frac{\mathscr{A} - \mathscr{A}_0}{\mathscr{A}_e - \mathscr{A}_0} = f_B^{\oplus} + Q_{i_a}(\eta - f_B^{\oplus}) + \sum_{i=1}^{N} F_{i_{1_a}}^{\oplus}(f_i^{\oplus} - f_B^{\oplus})$$

Scanned with OKEN Scanner

din care se vede că mărimea $\mathscr{A}_a$ se compune dintr-o parte „medie" $f_B^{\oplus}$ și una de „fluctuație" $\Sigma(f_i^{\oplus} - f_B^{\oplus})$ (datorită proprietății (3.4.10) a operatorului $\oplus$), astfel că descompunerea *a priori* $\mathscr{A}_a = \widetilde{\mathscr{A}}_a + a'_a$ apare justificată *a-posteriori*. Nu există nici o restricție (condiționare) matematică în efectuarea acestei descompuneri, întotdeauna avînd posibilitatea de a avea $|a'| << \widetilde{\mathscr{A}}_a$. În același mod descompunerile $\{f_i\}$ permit punerea în evidență a unui f_B și cuplaje de f_i astfel încît $(f_i^{\oplus} - f_B^{\oplus})/f_B^{\oplus} << 1$. Presupunînd $Q_{ca} = 0$ avem $\widetilde{\mathscr{A}}_a \sim f_B^{\oplus}$, $a' \sim \Sigma F_{i_a}^{\oplus}(f_i^{\oplus} - f_B^{\oplus}) \neq 0$. Să notăm cu a'_a fluctuația mărimii $\mathscr{A}_a$ fără ca în mod necesar să aibă media nulă (de exemplu $\mathscr{A}_a = u_a^2$, atunci $a'_a = \widetilde{u'^2_a} \neq 0$).

Deci un prim aspect al analizei FID este proprietatea lui $\mathscr{A}_a$ (4.5.1)' de a se descompune în medie și fluctuație. Generalitatea acestei proprietăți nu o face utilă decît în cazuri specifice, cum ar fi ecuația energiei cinetice $\mathscr{E} = \rho/2\,(u_i\,u_i)$ în straturi cu frecare intensă $\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\text{ mare},\ i \neq j\right)$. În schimb pentru o ecuație de tipul $\frac{\partial^2 \mathscr{A}_1}{\partial t^2} = f_B^1 + \Sigma f_i'(\vec{r},\ t)$, unde $f_B^{\oplus}$ conține o dublă mediere în timp, fluctuațiile sînt mai dificil de imaginat fizic, de exemplu pentru o coardă vibrantă. Să remarcăm că fluctuația din (4.5.1)' poate fi privită ca o parte a unei dezvoltări în jurul lui $f_B^{\oplus}$ din care s-au reținut numai termenii liniari.

Un al doilea aspect al analizei FID este posibilitatea de a pune în evidență, legat de arbitrarietatea descompunerii $f_B^1 + \sum_{i=1}^{N} f_i^1$, unele proprietăți stocastice ale modelului (4.5.1)', deși (4.5.1)' exprimă o relație deterministă. Termenii f_B^1, f_i^1 au individualitate fizică, ca expresii ale unor mecanisme și procese proprii modelului. De exemplu, ecuația energiei cinetice în coordonate carteziene se scrie

$$(4.5.2)\quad \nu \frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial y^2} \equiv \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\mathscr{E} + \nabla(p\vec{v}) + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) - \nu\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial z^2}$$

cei 18 termeni din membrul drept reprezentînd variația în timp a energiei $\mathscr{E}_t$ (un termen), convecția lui $\mathscr{E}$ datorită lui $\vec{v}$ (cei trei termeni $\vec{v}\ \nabla\ \mathscr{E}$), lucrul mecanic al presiunii (cei trei termeni $\nabla(p\vec{v})$, disipația $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ (9 termeni) și difuzia x și z (cei 2 termeni $\mathscr{E}_{xx}$, $\mathscr{E}_{zz}$). Numărul acestor termeni nu poate fi mărit sau micșorat arbitrar prin desscompuneri ca $p = p_1 + p_2 + \ldots$, $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \ldots$ căci ei au o semnificație fizică bine determinată. Totuși, în cursul mișcării (deci cu variația lui t) acești termeni își schimbă mereu valoarea relativă unul față de altul, acest lucru putînd fi pus în evidență mai ușor cu ajutorul FID și conducînd la o statistică a fluctuațiilor în continuum. Într-adevăr, fie ecuația transformată prin operatorul $\oplus$ al lui (4.5.2)

$$(4.5.2)'\quad \mathscr{E}^2 = \mathscr{E}_e^2 g_B^{\oplus} + \sum_{i=1}^{N} G_{i1}[g_i^{\oplus} - g_B^{\oplus}],\ g_B = -\frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_\delta^2)\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial \eta_E}\int_0^{\eta_E}(u'\mathscr{E})\mathrm{d}\eta'_E;$$

atît funcţiile care apar în (4.5.2) cît şi cele din (4.5.2)′ depind de două variabile y şi t şi respectiv de η_E şi τ, valoarea relativă a lor fiind dificil de estimat prin compararea punctuală a valorilor (punctele fiind (y, t) şi respectiv (η_E, τ)). În schimb, cu ajutorul FID, mai precis pe baza proprietăţilor (3.4.10) a operatorului $\oplus$, există şi o altă posibilitate de comparaţie şi anume aceea a funcţionalelor $\max\limits_{\eta\in[0,1]} |f_i^{\oplus} - f_B^{\oplus}|$, $\max\limits_{\eta\in[0,1]} |f_B^{\oplus}|$ în diferite puncte, care puncte acum sînt funcţii (distribuţii) de η_E pe care sînt definite aceste funcţionale. În §3.4 s-a arătat că apropierea dintre două funcţii (de ex. a lui ηu_η la două momente de timp apropiate) nu mai este păstrată de transformate, ca atare operatorul putînd fi o contracţie sau nu pe subspaţii metrice ale lui C [0, 1]. În acest fel, dacă în planul fizic comparaţia era dificilă datorită faptului că mărimile din ecuaţii aveau acelaşi ordin de mărime, cu ajutorul FID se pune în lumină, în plus, importanţa distribuţiei $f(\eta)$, apărînd mari diferenţe între funcţiile transformate. Există, astfel, o bază pentru a face o statistică a fluctuaţiilor, mai bine-zis, de a o pune în evidenţă cu ajutorul FID. Această statistică se bazează deci pe de o parte pe aceea că dacă f_i şi f_B sînt tipic transformabile, atunci $f_i^{\oplus} - f_B^{\oplus}$ este mică în comparaţie cu $f_B^{\oplus}$, iar pe de alta pe numărul mare de grupări care pot fi formate cu cei 18 termeni din (4.5.2)′ $\left(\sum\limits_{i=1}^{17} C_{18}^i = \right.$ $\left. = 2^{18} - 2 = 262.142\right)$, redistribuirea termenilor mici şi a celor importanţi din (4.5.2)′ fiind de aşteptat a avea loc foarte repede la varierea lui t. Apar astfel, datorită marii variaţii a valorii termenilor din (4.5.2)′, descompuneri „privilegiate", optime din punct de vedere al procesului descris. În acest sens, am putea numi „medie" soluţia care corespunde unei descompuneri în care un $f_B^{\oplus}$ rămîne mare la orice variaţie a termenilor ce-l compun.

Cei 18 termeni din (4.5.2) sînt relativ independenţi, ei reprezentînd mecanisme şi procese cuplate în ecuaţiile de conservare a impulsului şi masei. Totuşi, absenţa sau prezenţa unor termeni ca de exemplu $\nu\left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2$, $\nu\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$ etc. într-o curgere dominată de $U(y)$ nu modifică sensibil „media", însă afectează „fluctuaţiile". Alegerea drept f_B a unui astfel de termen, deşi justificată matematic, nu se motivează fizic datorită tocmai nepermanenţei lui ca termen de referinţă în diferenţele $f_i^{\oplus} - f_B^{\oplus}$. Mai logic pare alegerea lui f_B sub forma unei sume Σf_{Bi}, astfel încît totdeauna $\Sigma f_{Bi} \neq 0$. Numărul mare de descompuneri situează această alegere spre vîrful diagramei din figura 4.5.1 astfel că întotdeauna $f_B = \sum\limits_{i=1}^{k} f_{Bi}$ şi $f_s = \sum\limits_{i=1}^{l} f_i$ (unde $k + l = 8$) şi avem diferenţa $f_S^{\oplus} - f_B^{\oplus}$ sub un număr foarte mare de forme.

Numărul $N + 1$ al termenilor sumei $f_B + \sum\limits_{i=1}^{N} f_i$ poate varia pentru diversele formulări ale ecuaţiei considerate. De exemplu ecuaţia energiei are $N = 17$ în formularea dată în coordonate carteziene. Aşa cum am mai

spus, acest număr nu se poate modifica prin descompuneri arbitrare ale presiunii sau vitezei; în schimb, prin transformări de coordonate, numărul termenilor se modifică considerabil. Astfel, pentru ecuația energiei

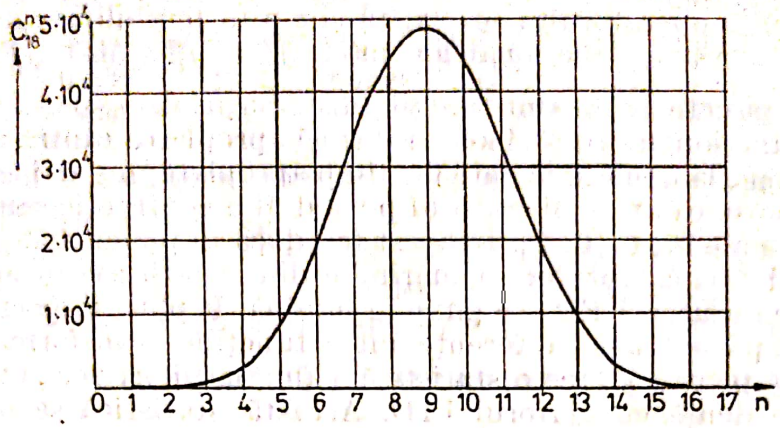


Fig. 4.5.1

avem în cazul coordonatelor intrinseci 14 termeni, în cazul coordonatelor carteziene 18 termeni și în cazul coordonatelor curbilinii generalizate 24 de termeni. În consecință, crește foarte mult și numărul descompunerilor. De asemenea, N crește dacă adăugăm efectul cîmpurilor electrice, magnetice, gravifice, termice, masice etc.

Astfel, în cazul magnetohidrodinamicii avem

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} + \frac{1}{\rho}\nabla p + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\mu^*}{c}\vec{H} \times \vec{\mathscr{I}} - \rho_e \vec{E}\right] = \nu\nabla\vec{v},\ \nabla\vec{v} = 0$$

$$\text{rot}\ \vec{E} = -\frac{\mu^*}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t};\ \nabla\vec{E} = \frac{4\pi}{k}\rho_e$$

$$\text{rot}\ \vec{H} = \frac{4\pi}{c}\vec{\mathscr{I}} + \frac{k}{c}\frac{\partial E}{\partial t};\ \nabla\vec{H} = 0,$$

unde cu $\vec{E}$ am notat intensitatea cîmpului electric, ρ_e este densitatea sarcinilor electrice, $\vec{H}$ este intensitatea cîmpului magnetic, $\vec{\mathscr{I}} = \sigma(\vec{E} + \frac{\mu^*}{c}\vec{v} \times \vec{H}) + \rho_e\vec{v}$ este densitatea curentului electric, k este constanta dielectrică a mediului fluid, μ^* permeabilitatea magnetică a mediului fluid, iar σ reprezintă conductivitatea electrică a mediului fluid. Ecuația energiei cinetice este în acest caz

$$\nu\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial y^2} = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} + (\vec{v}\nabla)\mathscr{E} + \nabla(p\vec{v}) + \mu\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right) - \nu\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial x^2} - \nu\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial z^2} +$$

$$+\frac{\mu^*}{c}\vec{v}(\vec{H} \times \vec{\mathscr{I}}) - \rho_e\vec{v}\vec{E}$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că, pe lîngă cei 18 termeni ai fluidului inert, au apărut termeni datoraţi conductibilităţii fluidului şi prezenţei cîmpurilor magnetic şi electric. În cazul simplificat $\nabla \vec{E} = 0$, $\nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi\sigma}{c}\left(\vec{E} + \frac{\mu^*}{c}\,\vec{v} \times \vec{H}\right)$ obţinem o ecuaţie cu 20 de termeni cu individualitate fizică. Numărul mare al descompunerilor, precum şi relativa independenţă a termenilor priviţi ca individualităţi fizice, asociată cu interacţiunea lor, permit o probabilizare a FID a ecuaţiilor Navier-Stokes.

Să scriem acum ecuaţia energiei în coordonate curbilinii pentru a nota numărul termenilor şi a le identifica semnificaţia fizică. Alegînd q_2 drept coordonată normală curgerii principale, această ecuaţie este

$$\nu\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial q_2^2} = H_2^2\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial t} + H_2^2\frac{u_i}{H_i}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_i} + H_2^2\frac{u_i}{H_i}\frac{\partial p}{\partial q_i} - \nu\frac{H_2^2}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_i^2}\right)\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_i} -$$

$$- \nu\frac{H_2^2}{H_1^2}\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial q_1^2} - \nu\frac{H_2^2}{H_3^2}\frac{\partial^2 \mathscr{E}}{\partial q_3^2} + \mu\frac{1}{H_i^2}\left(\frac{\partial u_j}{\partial q_i}\right)\left(\frac{\partial u_j}{\partial q_i}\right) + \mu\left(\frac{u_j}{H_i}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i}\right)\left(\frac{u_j}{H_i}\frac{\partial \vec{e}_j}{\partial q_i}\right)$$

Această ecuaţie cuprinde 30 de termeni, cei 12 termeni care apar în plus faţă de cazul cartezian fiind datoraţi curburii. Numărul descompunerilor creşte enorm ; fără îndoială, nu toate descompunerile sînt importante fizic pentru ecuaţia de conservare a energiei, însă toate sînt egal posibile [147].

Pentru FID care se adaptează curgerilor cu gradient mare normal pe direcţia principală a curgerii $\left(\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_2}\text{mare}\right)$, *curbura locală* a liniilor de curent joacă un rol deosebit de important. Într-adevăr, ea pune în evidenţă unii termeni ca $u^2/\mathscr{R}$, care apar ca forţe suplimentare, ca termeni noi în suma $\sum_{i=1}^{N} f_i$, independenţi într-o oarecare măsură de ceilalţi şi întrecîndu-i ca importanţă. Deci curbura locală a liniilor de curent intensifică probabilitatea descompunerilor şi a interacţiunii între diverşi termeni ai acestei formulări speciale, contribuind la o redistribuire a energiei E normală pe direcţia principală, astfel ca efectul mare al gradientului $\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q_2}$ să fie atenuat şi energia de adaos, datorită „fluctuaţiilor", să fie minimă.

Rămîne acum să încercăm o probabilizare a FID, adică să găsim procesul stocastic căruia i se aplică o astfel de formulare. În afară de aceasta, trebuie să mai descriem cîmpul fluctuaţiilor cu ajutorul acestei formulări, deci să găsim legătura dintre descrierea Reynolds şi cea a FID.

Pentru a studia aspectele stocastice ale FID să scriem mărimea $\mathscr{A}$ sub forma

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_e f_B^{\oplus} + \mathscr{A}_0(1 - f_B^{\oplus}) + Q_e(\eta - f_B^{\oplus}) + \sum_{i=1}^{N} F_i^{\oplus}(f_i^{\oplus} - f_B^{\oplus}),$$

unde N reprezintă numărul termenilor consideraţi în ecuaţia diferenţială originală. Prima încercare de modelare stocastică o constituie considerarea termenilor şi cuplurilor formate din aceştia ca o *perturbaţie stocastică*.

Scanned with OKEN Scanner

Într-adevăr, ecuaţia de mai sus se scrie :

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}_e f_B^{\oplus} + \mathscr{P}_1^{\oplus}(\mathscr{P}^{\oplus} - f_B^{\oplus}),$$

unde $\mathscr{P}$ este exprimat ca o funcţie de variabile aleatoare. De exemplu luînd $\mathscr{A}_1 = u$ (viteza după x într-o curgere cu frecare) şi utilizînd transformarea de coordonate $\xi = x$, $\eta = \int_0^y u\,dy' \Big/ \int_0^\delta u dy'$, $\zeta = z$, $\tau = t$ se ajunge a ecuaţia

$$u^2 = U_e^2(\eta u_\eta)^{\oplus} + \Sigma F_{i_1}^{\oplus}[f_i^{\oplus} - (\eta u_\eta)^{\oplus}] = U_e^2 f_B^{\oplus} + \mathscr{F}_p(f^{\oplus} - f_B^{\oplus}),$$

unde funcţia f_p de variabilă aleatoare p a fost pusă sub forma [190]

$$f_p = e^{-p\pi\eta} \sin[\pi\eta(p + B\tau)]\, \mathscr{F}_p = p\, Ce^{-2\sqrt{\eta}} F_{p_1}^{\oplus}.$$

Integrarea numerică, pornind de la $u^{(0)} = \eta^{1/2}(2 - \eta)^{1/2}$, a condus la obţinerea unei soluţii „turbulente" $u(t)$ de forma indicată în figura 4.5.2. Se remarcă o corelaţie perfectă între semnalul de la $\eta = 0{,}05$ şi $\eta = 0{,}25$ ceea ce arată că sistemul cu o singură perturbaţie nu permite decuplarea termenilor, astfel că ecuaţia rămîne parţial deterministă. Drept remedii menţionăm : 1) modificarea legii stocastice de alegere a intervalului $\Delta\tau$, 2) cuplarea stocastică a perturbaţiilor $\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2, \mathscr{P}_3 \ldots$, 3) ameliorarea tehnicii de iteraţie a soluţiei numerice.

O altă cale de modelare statistică a ecuaţiilor Navier-Stokes sugerată de FID constă în considerarea profilelor transformate drept profile în planul fizic, deci stări posibile de mişcare, adică soluţii către care tind curgerile cu frecare în regim nestaţionar fluctuant. Consideraţiile din §3.5 au arătat în fond că distribuţiile $\mathscr{A}(\eta, \xi, \zeta, \tau)$ sînt mai insensibile la variaţii în timp sau variaţii spaţiale decît distribuţiile originale, netransfor-

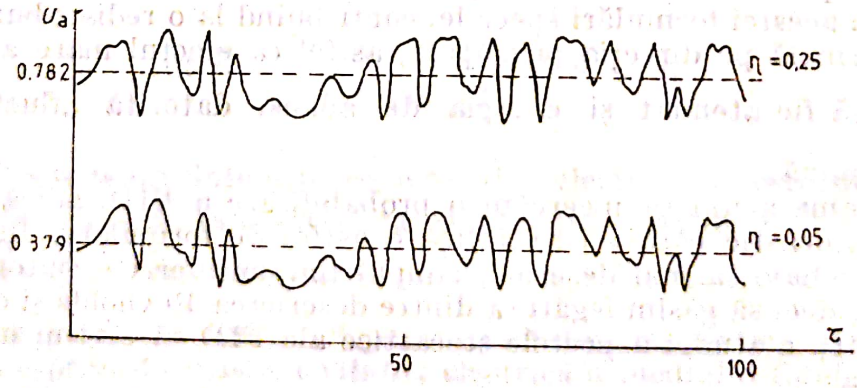


Fig. 4.5.2

mate $\mathscr{A}_1(x, y, z, t)$. Deci tendinţa către unicitate care se conjugă probabil cu un minim energetic este realizată de particule care fluctuează în jurul acestor „medii". Un suport fizic pentru o astfel de ipoteză se poate formula astfel : dacă fluctuaţiile se realizează între profilele din planul fizic şi profilele transformate considerate în planul fizic, ceea ce de fapt repre-

zintă transport de particule în vederea realizării unui minim energetic, atunci o măsură a acestor fluctuații este dată tocmai de diferența dintre distribuția energiei $E_a(\eta_0)$ din planul fizic și aceeași distribuție în planul η_2, ξ, unde $\eta_2 = \int_0^{\eta} E_a\,dy' \Big/ \int_0^{\delta} E dy'$ adică $E_a^*(\eta_0)$, unde $E_a^*(\eta_2) = E_a[\eta_0(\eta_2)]$. Or, numeroase rezultate experimentale confirmă acest lucru [170], [36]. Într-adevăr, în general avem ($e = E_a^* - E_a$, $h = \eta_0 - \eta_2$)

$$\widetilde{u_i' u_i'} = \mathscr{F}_{ii}(e, h) \Rightarrow \widetilde{u'^2} \sim \widetilde{w'^2} \sim e\,;\ \widetilde{v'^2} \sim eh.$$

Un alt aspect fizic îl constituie ciclicitatea unor fenomene asociate fluctuațiilor, deterministe în privința comportării, dar aleatoare ca interval de repetare în timp și spațiu. Pentru aceasta se consideră dinamica fluctuațiilor ca determinată de distribuția $E_a(\eta_0)$ din planul fizic și de $E_a^*(\eta_0)$ în spațiul transformat. Diferența dintre $E_a(\eta_0)$ și $E_a^*(\eta_0)$, se poate acoperi în două moduri : a) schimbarea funcției de probabilitate la nivel molecular în sensul modificării repartiției Maxwell-Boltzmann ; b) modificarea interacțiunii cu curentul neperturbat în sensul antrenării de fluid prin varierea grosimii δ a stratului de frecare, a vitezei exterioare U_e și a vitezei locale $u(y)$. Cum pentru orice distribuție $E_a(\eta_0, t)$ și transformata $E_a^*(\eta_0, \tau)$ maximul lui h se află aproximativ la mijlocul stratului, rezultă că v, componenta normală pe curgere, este aceea care transportă particule de fluid prin procesul de ejecție sau de „umplere" spre perete [38]. În acest mod, se realizează un profil de viteze $u(y, t)$, și deci o distribuție de energie cinetică $E_a(\eta_0, t)$, foarte distorsionată a cărei transformată E_0^* necesită o mai mare cantitate de energie fluctuantă pentru acoperirea diferenței $E_a^* - E_a$. În momentul realizării profilului $E_a^*(\eta_0)$, cantitatea de energie fluctuantă scade și profilul tinde să se reîntoarcă la un stadiu „laminar" care din nou impune o cantitate mare de energie fluctuantă, deoarece $|E_0^* - E_a|$ este mare. Acest ciclu se repetă bineînțeles într-un mod foarte neregulat, dar determinismul acestui proces de distribuție și redistribuție a energiei cinetice prin mecanismele de ejecție, „umplere" [38] este bine pus în evidență de cercetarea experimentală.

În concluzie, în acest paragraf am relevat următoarele proprietăți ale FID a ecuațiilor Navier-Stokes pentru curgerile cu frecare : i) pune în evidență descompunerea energiei cinetice într-o parte „medie" și o parte „fluctuantă" fără introducerea unei astfel de descompuneri *a priori* ca în formularea Reynolds ; ii) deschide o cale de trecere de la determinism la stocasticitate prin considerarea perturbațiilor stocastice ; iii) permite estimarea cîmpului fluctuațiilor energiei cinetice asociate unui profil de energie medie.

§ 4.6. Determinarea distribuției fluctuațiilor asociate unui profil de viteze medii

După cum am mai menționat, mișcarea fluidelor este guvernată și în regimul turbulent de ecuațiile Navier-Stokes, numai că aici mărimile instantanee, din cauza complexității și a caracterului aleator, chiar dacă ar putea fi determinate, n-ar fi de vre-un folos practic. S-a pus atunci

problema descompunerii mișcării în medie și fluctuație, descompunere pe care *a priori* o dă teoria lui Reynolds și *a posteriori*, cea a FID. O teorie riguroasă pentru descrierea completă a cîmpului aleator cu ajutorul densităților de probabilitate este deosebit de dificilă, de aceea se preferă teorii aproximative în care se consideră doar primele momente statistice. Pentru a le determina, se mediază ecuațiile Navier-Stokes și se obțin ecuații pentru diferite momente (corelații); din păcate, însă, ecuațiile care conțin mărimile medii conțin și corelațiile de ordinul doi, următoarele conțin corelații de ordinul doi și trei etc. O teorie în care ne oprim la corelații de ordin k va trebui să cuprindă relații între acestea și cele de ordinul $k+1$. În acest fel, informația cuprinsă în toate ecuațiile următoare trebuie înglobată în aceste relații numite de închidere. Cu alte cuvinte, informațiile ce se pierd prin mediere trebuie suplinite prin ipoteze suplimentare care au la bază fie diferite analogii, fie un suport experimental care permite o reprezentare aproximativă a comportării fluidului ținînd seama de mecanisme fizice globale. Alte tipuri de relații de închidere au fost date pornind direct de la ecuațiile Navier-Stokes (și nu de la ecuațiile lui Reynolds) [191] sau de la FID. Diferitele relații de închidere conduc la diferite teorii fenomenologice semiempirice ale turbulenței.

Pentru o curgere cu frecare a cărei caracteristică este profilul de viteză medie $U(y)$ dat într-o secțiune (x_0, z_0), o relație generală de închidere care exprimă tensorul lui Reynolds în funcție de U are forma

$$\overline{u_i' u_j'(y)} = \mathscr{F}_{ij}\left(U,\ U_y, \int_0^y U dy', \ldots\right),$$

unde $\mathscr{F}_{ij}$ sînt niște operatori integro-diferențiali definiți pe spațiul vitezelor.

Analogia cu mișcarea laminară și cu teoria cinetică a gazelor a condus la modelări de tip difuziv (Boussinesq, Prandtl) și anume de tip lungime de amestec

$$\overline{u_i' u_j'} \sim C_{ij} l_{ij} U_y$$

și de tip vîscozitate (eddy viscosity)

$$\overline{u_i' u_j'} \sim \varepsilon_{ij} U_y,$$

unde l_{ij} este „lungimea de amestec", C_{ij} constante, ε_{ij} coeficientul de vîscozitate datorat fluctuațiilor iar U_y gradientul local transversal. În scopul integrării ecuației de mișcare din conducte $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial \tau}{\partial y}$ sau din stratul limită $UU_x + VU_y + 1/\rho\, P_x = \tau_y$, $U_x + V_y = 0$ interesul principal a fost acordat expresiei lui τ, pusă sub forma

$$\tau = \mu U_y - \rho \overline{u'v'} \approx (\mu_L + \mu_{fl}) U_y,$$

unde μ_L este vîscozitatea dinamică laminară și μ_{fl} este cea datorată fluctuațiilor. Celelalte componente ale tensorului lui Reynolds n-au primit o atenție deosebită decît în ultimul timp.

Scanned with OKEN Scanner

Cele două tipuri de modelări de mai sus au fost generate de interese practice imediate, aplicabilitatea lor fiind redusă la anumite cazuri particulare. Este totuşi interesantă o scurtă privire asupra evoluţiei acestor teorii pentru a observa apropierea progresivă a modelării fenomenologice de cunoaştere fundamentală a statisticii fluctuaţiilor, cunoaştere bazată pe acumulări istorice (aproximativ un secol) de informaţii teoretice şi date experimentale.

Prima etapă o constituie atribuirea unor expresii lui ε_{ij}, ca de exemplu $\varepsilon_{ij_{fl}} = \text{const} \gg \mathscr{E}_{ij_L}$ sau $\varepsilon_{ij} \sim l_{ij}^2 U_y$, unde lungimea de amestec a evoluat de la expresia simplă a lui Prandtl $l \approx Ky$ la cea a lui Van Driest $l \approx Kye^{-Ay}$ [19], [164]. Baza conceptuală pentru aceste expresii o constituie intuiţia fizică, datele experimentale, iar confirmarea o constituie cazuri simple de curgeri prin canale şi conducte sau în stratul limită dezvoltat cu legi „universale" de viteză.

Într-o a doua etapă s-a pornit de la unele procese fizice mai complexe pentru determinarea caracteristicilor turbulente cu frecare. Astfel, sînt lucrările lui Bjorgum [68], inspirate din teoria stabilităţii mişcării laminare, a lui Malkus [68], care atribuie maxim de disipaţie unei curgeri turbulente şi mai în urmă, a lui Black [8], care atribuie un anumit tip de interacţiune între vîrtejurile de scară mică şi cele de scară mare în apropierea peretelui. Mai recent s-a propus un proces difuziv pentru μ_{fl} care ar fi soluţia unei ecuaţii de tip difuziv, ecuaţie în care sînt introduse multe elemente fenomenologice [124], [126]. În mod similar, modelul lui Saffman [191], recurge la $\varepsilon = \frac{e}{\omega}$, $e = \widetilde{u'^2} + \widetilde{v'^2} + \widetilde{w'^2}$, unde e şi ω satisfac ecuaţii neliniare de tip difuziv.

Într-o a treia etapă se reunesc influenţele teoriei statistice a turbulenţei izotrope cu acele ale formulării Reynolds şi cu cele ale analizei numerice aplicate atît ecuaţiilor cît şi prelucrării datelor experimentale. Fie, astfel, ecuaţiile lui Reynolds pentru $\overline{u_i' u_j'}$ asociate curgerii staţionare $U_i(x, y, z)$

$$\nu \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}(\overline{u'_i u'_j}) = U_k \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u'_i u'_j}) + \overline{u'_j u'_k}\frac{\partial U_i}{\partial x_k} + \overline{u'_i u'_k}\frac{\partial U_j}{\partial x_k} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{u'_i u'_j u'_k}) + \frac{1}{\rho}\left[\overline{u'_i \frac{\partial p'}{\partial x_j}} + \overline{u'_j \frac{\partial p'}{\partial x_i}}\right] + 2\nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_k}};$$

aceste ecuaţii au fost insuficient exploatate datorită dificultăţilor de apreciere a importanţei relative a diferiţilor termeni între care $\overline{u'_i p'_{x_j}}$ a reprezentat mult timp o piedică descurajatoare. Or, acumulările de date experimentale, progresele în problema închiderii (direct interpolation method [97], de exemplu), progresele în cunoaşterea turbulenţei izotrope sau local izotrope $\left(\text{disipaţia } \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_k}\frac{\partial u'_j}{\partial x_j}}\right)$ ca şi potenţialul ridicat al computerilor [164] au permis obţinerea de soluţii şi modele simplificate ale ecuaţiilor (4.6.1). Să notăm şi programele de calcul numeric datorate integrării ecuaţiilor (4.6.1) şi a celor corespunzătoare pentru U_i [19], în care se fac anumite ipoteze de obiectivitate şi invarianţă.

Scanned with OKEN Scanner

Din (4.6.1) se obține ecuația energiei cinetice a fluctuațiilor, $e = \frac{\rho}{2}(\widetilde{u'^2} + \widetilde{v'^2} + \widetilde{w'^2})$ în care corelațiile de ordinul doi se exprimă cu ajutorul unei relații de închidere de tip Prandtl, vîscozitatea fiind, după ipoteza lui Kolmogorov, proporțională cu $e^{1/2}$. Cu alte cuvinte, influența izotropiei locale a lui Kolmogorov s-a făcut simțită în sistemul de ecuații propus numai de Prandtl și cunoscut drept modelul Prandtl-Kolmogorov :

$$U\frac{\partial e}{\partial x} + V\frac{\partial e}{\partial y} - kLe^{1/2}(U_y)^2 + \frac{c}{L}e^{3/2} = \frac{\partial}{\partial y}\left[K_q L e^{1/2}\frac{\partial e}{\partial y}\right] \tag{4.6.1}$$

$$U_x + V_y = 0,$$

unde

$$-\overline{u'v'} = k\,L\,e^{1/2}U_y, \left(\overline{e + \frac{p'}{\rho}}\right)v' = -K_q\,L\,e^{1/2}\frac{\partial e}{\partial y},$$

$$k = 0{,}56,\quad c = k^3,\quad K_q = 0{,}38,\quad L = 0{,}4\,y.$$

De aceeași factură este și modelul lui Bradshaw [19]

$$U\frac{\partial e}{\partial x} + V\frac{\partial e}{\partial y} - 0{,}3\,e\,U_y + \frac{1}{L_1}(0{,}3\,e)^{3/2} + 0{,}3\frac{\tau_{max}}{\rho U_\infty}\frac{\partial}{\partial y}[\varphi(\eta_0)\,e] = 0$$

$$U_x + V_y = 0,$$

unde $-\overline{u'v'} = 0{,}3\,e$; $(e + \overline{p'/\rho})\,v' = 0{,}3\,e\frac{\tau_{max}}{U_\infty}\varphi(\eta_0)$, funcțiile empirice $\varphi(\eta_0)$ și $L_1/\delta = \psi(\eta_0)$ fiind date în figura 4.6.1. Să remarcăm că în ambele aceste ultime modele corelațiile $\overline{u'v'}$, $\overline{p'v'}$ depind de energia e. Există modele [164], [191], [12] din ce în ce mai complicate, toate variindu-și coeficienții, dependenți de e, reținînd sau introducînd termeni noi în (4.6.1). Aceste modele se confirmă pe cazuri de curgeri cu frecare din ce în ce mai complicate (desprindere, gradienți de presiune longitudinală mari, efecte de curbură, de sucțiune sau suflaj, de grad de turbulență a curentului exterior etc.). Modelele de mai sus furnizează o legătură între e și U via aceste ecuații și constantele respective. Pentru a elimina pe V utilizăm coordonatele $\xi = x$, $\eta = \int_0^y U\,dy' \Big/ \int_0^\delta U\,dy' = \psi/\psi_\delta$, cu ajutorul cărora ecuația lui Prandtl-Kolmogorov se scrie

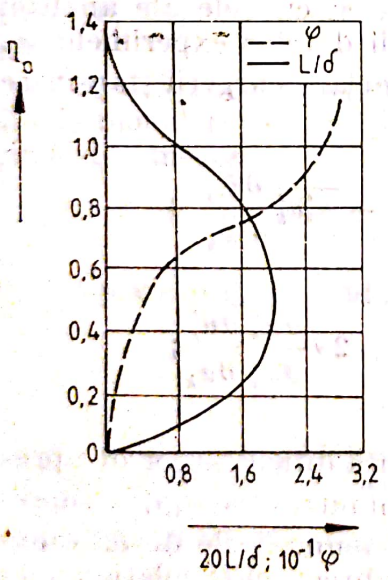


Fig. 4.6.1

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\mathcal{G}(U_a)\frac{\partial}{\partial\eta}(e_a^{3/2})\right] = Ae_a - B\eta\frac{\partial e_a}{\partial\eta} - C\,\mathcal{H}(U_a)\,e_a^{1/2} + D\mathcal{G}^{-1}(U_a)\,e_a^{3/2} \tag{4.6.2}$$

$$\mathcal{G}(U_a) = f_L U_a\int_0^\eta U_a^{-1}d\eta\,;\quad \mathcal{H}(U_a) = f_L U_a^{-1}\int_0^\eta U_a^{-1}d\eta\left[\frac{\partial}{\partial\eta}(U_a^2)\right]^2$$

unde $e_a = e/e_M = e/e_{max}$. Să notăm $L = K_L \psi_\delta U_e^{-1} \int_0^\eta U_a^{-1} d\eta \cdot f_L(\eta)$; făcînd ipoteza $f_L = 1 - \exp\left\{ - k_A \frac{\mathcal{R}e_\delta}{U_{ea}} \sqrt{2C_f} \int_0^\eta U_a^{-1} d\eta \right\}$ ecuaţia (4.6.2) devine prin FID o ecuaţie pentru e_M

$$\frac{d}{d\xi}(e_M^{1/2}) + \left\{ \frac{c}{2K_L} \psi_\delta^{-1} \frac{\int_0^1 \eta \mathcal{G}^{-1} e_a^{3/2} d\eta}{\int_0^1 \eta e_a d\eta} + \frac{K_q K_L}{3\psi_\delta} \frac{\int_0^1 \mathcal{G} d(e_a^{3/2})}{\int_0^1 \eta e_a \, d\eta_a} \right\} (e_M^{1/2})^2 -$$

(4.6.3)

$$- \frac{\psi_\delta^{-1}}{2} \frac{d\Psi_\delta}{d\xi} \frac{\int_0^1 \eta^2 de_a}{\int_0^1 \eta e_a \, d\eta} e_M^{1/2} - \frac{kK_L}{8} \frac{U_e^2}{\psi_\delta} \frac{\int_0^1 \eta \mathcal{H} e_a^{1/2} \, d\eta}{\int_0^1 \eta e_a d\eta} = 0$$

$$\xi = \xi_0 : \quad e_M = e_{M_0}, \quad \psi_\delta = \psi_{\delta_0};$$

dacă $f_L = 1$, $A = \frac{3}{2} (K_q K_L)^{-1} \psi_\delta e_M^{-3/2} \frac{d(e_M^{1/2})^2}{d\xi} \sim$ const.; $B = \frac{3}{2} (K_q K_L)^{-1} \cdot \frac{d\varphi_\delta}{d\xi} e_M^{-1/2} \sim$ const.; $C = \frac{3}{8} \frac{k}{K_L} \frac{U_e^2}{e_{r1}} \sim$ const. se vede că pentru placa plană ($U_e = \text{const.} \quad \psi_\delta \sim \xi^{\frac{1}{2-p}}$) nu sînt valabile soluţiile similare $e_a(\eta)$, dacă $p \neq 1$. Se aplică acum lui (4.6.2) FID, luînd drept prima aproximaţie $U_a = \eta^m$, $e_a^{(0)} = \frac{\eta^{2m\frac{1-m}{1+m}} - \eta^{2m}}{\frac{2m}{1+m} \left(\frac{1-m}{1+m} \right)^{\frac{1-m}{2m}}}$, aceste expresii fiind furnizate de teoria prezentată în continuare. Rezultate ale integrării numerice a ecuaţiei (4.6.3) sînt date în diagrama (A.6.30).

Fie, astfel, energia cinetică $\mathcal{E} = \rho/2 \, \mathcal{V}^2 = \rho/2 \, (U_i + u_i')^2$ în valori instantanee; ecuaţia sa se scrie

$$\mathcal{E}^{1+m} = \mathcal{E}_e^{1+m} g_{B,m}^{\oplus} + \sum_{i=1}^{N} G_{i,m_1}^{\oplus} (g_{i,m}^{\oplus} - g_{B,m}^{\oplus}), \tag{4.6.4}$$

unde $\mathcal{E}|_{y=0} = 0$, $\mathcal{E}|_{y=\delta} = \mathcal{E}_e$, $\mathcal{E}_y|_{y=\delta} = 0$, iar $g_{B,m}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$, $g_{i,m}(\xi, \eta, \zeta, \tau)$ sînt funcţii de coordonatele $\xi = x$, $\eta_m = \int_0^y \mathcal{E}^m dy' \Big/ \int_0^\delta \mathcal{E}^m dy'$, $\zeta = z$, $\tau = t$.

Pentru a găsi relaţii $\overline{u_i' u_j'} = \mathcal{F}_{ij}(\tilde{\mathcal{E}})$, sînt necesare următoarele consideraţii:

a) Valoarea instantanee $\mathcal{E}$ a energiei cinetice se poate media şi descompune astfel

$$\tilde{\mathcal{E}} = \rho/2 \overline{(U_i + u_i')^2} = \rho/2 \, U_i^2 + \frac{\rho}{2} \widetilde{u_i'^2} = E + e \tag{4.6.5}$$

Scanned with OKEN Scanner

de unde rezultă [186]

$$\widetilde{\mathscr{E}^2}/E \simeq \frac{1}{E}\left(\frac{\rho}{2}\overline{U_i^2} + \rho U_i u_i' + \rho/2\ \overline{u_j' u_j'}\right)^2 = E + 2e +$$

(4.6.6)

$$+ \rho\frac{U_j U_j}{E}\rho\overline{u_j' u_j'} + 2\rho\frac{U_i U_j}{E}\rho\overline{u_i' u_j'} + O(\overline{u_i' u_j' u_j'}, \widetilde{u_j'^4}).$$

b) Dinamica fluctuaţiilor se realizează astfel încît : i) respectă FID a lui $\mathscr{E}$; ii) îndeplineşte condiţia ca diferenţele $|G^{\oplus}_{i,m_1}(g^{\oplus}_{i,m} - g^{\oplus}_{B,m})|/\mathscr{E}_e^{1+m}$ $g^{\oplus}_{B,m} << 1$ (să fie mici) şi iii) pentru $m = 1$ s-ar putea ca FID să aibă soluţie unică (§ 3.5) prin transformări de coordonate în coordonate euleriene ceea ce în coordonatele lagrangeene reprezintă deplasări reale de particule. Să scriem FID a lui $\mathscr{E}$ în spaţiul fizic ($m = 0$, notînd mărimile cu indice P) şi în spaţiul transformat ($m = 1$, cu indicele T). Avem

$$m = 0 : \mathscr{E}_P = E_P + e_P = E_e g^{\oplus}_{B,0} + \sum_{i=1}^{N} G^{\oplus}_{i,0_1}(g^{\oplus}_{i,0} - g^{\oplus}_{B,0}) + e_e g^{\oplus}_{B,0}$$

$$m = 1 : (\widetilde{\mathscr{E}^2}/E)_T = E_T + 2e_T + \left(\rho\frac{U_i U_i}{E}\right)_T(\overline{\rho u_i' u_i'})_T + 2\left(\rho\frac{U_i U_j}{E}\right)_T(\overline{\rho u_i' u_j'})_T =$$

$$(4.6.7) \quad = E_e\frac{g^{\oplus}_{B,1}}{E_a} + \sum_{i=1}^{N} G^{\oplus}_{i,1_1}\frac{g^{\oplus}_{i,1} - g^{\oplus}_{B,1}}{E} + [2e_e + \dots]\frac{g^{\oplus}_{B,1}}{E_a}$$

ceea ce conduce la diferenţa

$$(\widetilde{\mathscr{E}^2}/E)_T - \widetilde{\mathscr{E}}_P = E_T - E_P + 2e_T - e_P + \left(\rho\frac{U_i U_i}{E}\right)_T(\overline{\rho u_i' u_i'})_T +$$

$$+ 2\left(\rho\frac{U_i U_j}{E}\right)_T(\overline{\rho u_i' u_j'})_T + \dots = E_e\left(\frac{g^{\oplus}_{B,1}}{E_a} - g^{\oplus}_{B,0}\right) + e_e\left(2\frac{g^{\oplus}_{B,1}}{E} - g^{\oplus}_{B,0}\right) +$$

(4.6.8)

$$+ \sum_{1}^{N}\frac{G^{\oplus}_{i,1_1}}{E}(g^{\oplus}_{i,1} - g^{\oplus}_{B,1}) - \sum_{1}^{N} G^{\oplus}_{i,0_1}(g^{\oplus}_{i,0} - g^{\oplus}_{B,0})$$

Această expresie este valabilă în orice moment şi în orice punct (η_0 sau η). Ea poate fi pusă sub forma

$$2e_T - e_P + \left(\rho\frac{U_i U_i}{E}\right)_T(\overline{\rho u_i' u_i'})_T + 2\left(\rho\frac{U_i U_j}{E}\right)_T(\overline{\rho_i u_i' u_j'})_T + \dots =$$

$$(4.6.9) \quad = (E_T - E_P)\left\{\left[E_e\frac{g^{\oplus}_{B,1}/E_a - g^{\oplus}_{B,0}}{E_T - E_P} - 1\right] + e_e\frac{g^{\oplus}_{B,1}/E_a - g^{\oplus}_{B,0}}{E_T - E_P} +\right.$$

$$\left. + \sum_{i}^{N}\frac{G^{\oplus}_{i,1_1}\dfrac{g^{\oplus}_{i,1} - g^{\oplus}_{B,1}}{E_a} - G^{\oplus}_{i,0_1}(g^{\oplus}_{i,0} - g^{\oplus}_{B,0})}{E_T - E_P} + e_e\frac{g^{\oplus}_{B,1}/E_a}{E_T - E_P}\right\}$$

Scanned with OKEN Scanner

c) Pentru a obține o evaluare a cîmpului fluctuațiilor să calculăm diferența de mai sus pentru punctele corespunzătoare $\eta_1(\eta_0) = \int_0^{\eta_0} E_a d\eta_0' \Big/ \int_0^1 E_a d\eta_0'$ astfel că $E_a(\eta) = E_a(\eta_0)$ și să utilizăm proprietatea (3.4.10) $g^{\oplus}_{B,1}/E \approx E_a^*$, $g^{\oplus}_{B,0} \approx E_a$. Obținem atunci

$$2e(\eta) - e(\eta_0) + \left(\rho \frac{U_i U_i}{E}\right)(\rho\overline{u_i' u_i'})(\eta) + 2\left(\rho \frac{U_i U_j}{E}\right)(\rho\overline{u_i' u_j'})(\eta) =$$

$$= e_e\left[\frac{g^{\oplus}_{B,1}}{E}(\eta) - g^{\oplus}_{B,0}(\eta_0)\right] + e_e \frac{g^{\oplus}_{B,1}}{E}(\eta) \approx$$

$$\approx e_e\left[\frac{g^{\oplus}_{B,1}}{E}(\eta_0) + (\eta - \eta_0)\frac{\partial}{\partial \eta_0}\left(\frac{g^{\oplus}_{B,1}}{E}\right) - g^{\oplus}_{B,0}(\eta_0)\right] + \tag{4.6.10}$$

$$+ e_e \frac{g^{\oplus}_{B,1}}{E}(\eta_0) + e_e(\eta - \eta_0)\frac{\partial}{\partial \eta_0}\left(\frac{g^{\oplus}_{B,1}}{E}\right) \approx$$

$$\approx K(e_e)[E_a^* - E_a](\eta_0) + K_1(e_e, g_{ij}\overline{u_i' u_j'})(\eta_0 - \eta)\frac{\partial E_a}{\partial \eta_0} + \ldots$$

Observînd că

$$2e(\eta) - e(\eta_0) = 2e(\eta_0) + 2\frac{\partial e}{\partial \eta}(\eta - \eta_0) - e(\eta_0) \approx e(\eta_0) + \ldots$$

$$\left(\rho \frac{U_i U_i}{E}\right)(\rho\overline{u_i' u_i'})(\eta) \approx 4e(\eta_0) + \ldots \tag{4.6.11}$$

$$2\left(\rho \frac{U_i U_j}{E}\right)(\rho\overline{u_i' u_j'}) \approx 4\rho\overline{u_i' u_j'} + \ldots$$

putem pune, în general,

$$\overline{u_i' u_j'} = \mathscr{F}_{ij}\left(E_a^* - E_a, \eta_0 - \eta, \frac{\partial E_a}{\partial \eta_0}\right). \tag{4.6.12}$$

Cantitățile $e = E_a^* - E_a$; $h = \eta_0 - \eta$; $t = \dfrac{dE_a}{d\eta_0}$ sînt esențiale pentru descrierea cîmpului fluctuațiilor asociate unui profil de viteze dat $U(y)$. Pentru găsirea lui $\mathscr{F}_{ij}$ vom utiliza analiza adimensională care con-

Scanned with OKEN Scanner

duce la o relaţie de tipul

$$\frac{u_i' u_j'}{E_e}(\eta_0) \approx K_{ij} e^{\alpha_{ij}} h^{\beta_{ij}} \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_j} + \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right)^{\gamma_{ij}} \tag{4.6.13}$$

unde K_{ij}; α_{ij}; β_{ij}; γ_{ij} sînt parametrii determinaţi statistic prin prelucrarea datelor experimentale [181], [38].

Important este faptul că o astfel de relaţie a fost dedusă pornind de la FID a ecuaţiei energiei şi nu de la ecuaţiile lui Reynolds ca în modelele Prandtl-Kolmogorov, Bradshaw etc. Mărimile e şi h caracterizează diferenţa dintre distribuţia E_a de energie în planul fizic şi $E_a^*(\eta_0)$ în planul transformat (fig. 4.6.2). Ele dau o măsură a intensităţii fluctuaţiilor şi a

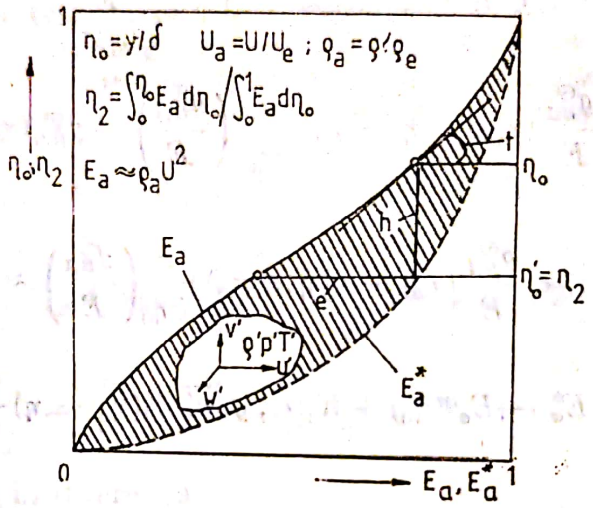


Fig. 4.6.2

distribuţiei lor în funcţie de η_0. De aceea, în prima aproximaţie, se pot lua valori simple, întregi, pentru α_{ij}, β_{ij} astfel că

$$\begin{vmatrix} \tilde{\rho}\overline{u'^2} & \tilde{\rho}\overline{u'v'} & \tilde{\rho}\overline{u'w'} \\ \tilde{\rho}\overline{v'u'} & \tilde{\rho}\overline{v'^2} & \tilde{\rho}\overline{v'w'} \\ \tilde{\rho}\overline{w'u'} & \tilde{\rho}\overline{w'v'} & \tilde{\rho}\overline{w'^2} \end{vmatrix} \sim \begin{vmatrix} e & ht & e \\ ht & eh & ht \\ e & ht & e \end{vmatrix} \tag{4.6.14}$$

rămînînd ca parametrii K_{ij} să fie determinaţi prin prelucrarea statistică a datelor experimentale.

§ 4.7. Modele ale dinamicii fluctuaţiilor

În acest paragraf în problema distribuţiei fluctuaţiilor asociate unei distribuţii medii a energiei cinetice $U_a^2(\eta_0)$, vom analiza următoarele aspecte : 1) modele ale dinamicii fluctuaţiilor bazate pe ecuaţiile lui Reynolds ; 2) modele ale dinamicii fluctuaţiilor bazate pe FID ; 3) semnificaţia transformării de coordonate în cîmpul fluctuaţiilor în reprezentarea lagrangeană şi euleriană.

1) Modelele privind dinamica fluctuaţiilor sînt relativ puţine [158], [164], [73]. Nu este cunoscută nici o încercare de rezolvare a ecuaţiilor lui Reynolds ale mărimilor instantanee $u_i'(\vec{r}, t)$:

$$\frac{\partial u_i'}{\partial t} + (U_j + u_j')\frac{\partial}{\partial x_j}(U_i + u_i') - \overline{(U_j + u_j')\frac{\partial}{\partial x_j}(U_i + u_i')} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x_i} = \nu \Delta u_i'$$

(4.7.1)

$$\frac{\partial u'}{\partial x_j} = 0$$

care poate furniza pe $u_i'(\vec{r}, t)$, $p'(\vec{r}, t)$ dacă se cunosc media $U(\vec{r}, t)$ şi corelaţiile $\overline{u_i' u_j'}(\vec{r}, t)$ şi dacă u_i', p' trebuie să satisfacă condiţiile

$$\tilde{u}_i' = \frac{1}{T}\int_0^T u_i'\, dt = 0; \quad \overline{p'} = \frac{1}{T}\int_0^T p'\, dt = 0$$

pentru T suficient de mare. Modelele cercetate sînt, de fapt, ecuaţii obţinute din (4.7.1) prin trunchiere. Astfel, în modelul recent al lui Reichart, valabil pentru zona de lîngă perete a stratului limită turbulent, în care se reţin numai termeni liniari, se consideră

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial x} = \nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y^2} - \frac{\partial u'}{\partial t} - \left(U\frac{\partial u'}{\partial x} + v'\frac{dU}{dy}\right) + \dots,$$

(4.7.2)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p'}{\partial y} = \nu\frac{\partial^2 v^2}{\partial y^2} - \frac{\partial v'}{\partial t} - U\frac{\partial v'}{\partial x} + \dots$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} = 0$$

Punînd $\tau' = \mu\frac{\partial u'}{\partial y}$ şi derivînd prima ecuaţie (4.7.2) în raport cu y avem, deoarece $v' < u', \frac{\partial u'}{\partial x} < \frac{\partial u'}{\partial y}$,

$$\frac{\partial^2 \tau'}{\partial y^2} - \frac{1}{\nu}\frac{\partial \tau'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu\frac{\partial^2 v'}{\partial y^2} - \rho\frac{\partial v'}{\partial t} - \rho U\frac{\partial v'}{\partial t}\right) + \rho U\frac{\partial u'}{\partial x} + \rho v'\frac{dU}{dy} \approx 0$$

Scanned with OKEN Scanner

a cărei soluție este

$$\tau' = Ae^{ky}\cos(\omega t + Ky), \quad K^2 = \omega/2\nu$$

sau, aproximativ pentru u', avem $u' \approx \frac{A}{\mu} ye^{ky/2}\cos\left(\omega t + \frac{Ky}{2}\right) + \ldots$

Se observă că $\widetilde{u'} = \frac{1}{T}\int_0^T u\,dt = 0$, $(\omega T = 2k\pi)$; $\widetilde{u'^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{\mu} ye^{ky/2}\right)$.

Cunoașterea experimentală a variației lui $\widetilde{u'^2}(y)$ permite determinarea constantelor de integrare. Astfel, utilizînd mărimile obișnuite ale stratului de lîngă perete $\tau_w = \rho u_\tau^2$, $y^* = y\,u_\tau/\nu$ obținem

$$\frac{\sqrt{\widetilde{u'^2}}}{u_\tau}\frac{A}{\sqrt{2}\,\tau_w} y^* e^{\frac{ky}{u_\tau}\frac{y^*}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}\,\tau_w} y^*\left(1 + \frac{\nu K}{u_\tau}\frac{y^*}{2} + \ldots\right)$$

Datele experimentale furnizează $d/dy^*\,(\sqrt{\widetilde{u'^2}}/u_\tau) \approx 0{,}24$ astfel că rezultă $A = 0{,}24\sqrt{2}\,\tau_w$.

Pentru a determina frecvența ω a oscilațiilor, utilizăm maximul lui $\sqrt{\widetilde{u'^2}}/u_\tau$ punînd $c = -\sqrt{\omega}/2\nu$ și obținem

$$y^*_{max} = \frac{2\sqrt{2}\,u_\tau}{\sqrt{\omega\,\nu}} \Rightarrow \omega = \frac{8u_\tau^2}{\nu\,y^{*2}_{max}}.$$

Să remarcăm că acest model simplificat redă comportarea fluctuațiilor lîngă perete, punînd în evidență o singură frecvență dominantă, care se pretează verificării experimentale fie prin inspecția oscilogramelor [38], fie prin măsurători ale fluctuațiilor de presiune la perete [68]. Mai adăugăm că modelul se poate complica prin introducerea unor termeni suplimentari sau prin considerarea unor spectre de frecvență, dar natura lui semiempirică rămîne aceeași. În sfîrșit, să menționăm că literatura de specialitate, în afara acestui model foarte simplificat, nu oferă alte soluții ale ecuațiilor lui Reynolds în valori instantanee.

2) Un model de dinamica fluctuațiilor bazat pe FID se poate imagina în felul următor. Se consideră expresia tensiunii $u'v'/U_e^2 \simeq \mathcal{K}(t)\,h\,\frac{dU_a}{d\eta_0}$ a fluctuațiilor și care reprezintă produsul $u'v'$ instantaneu, astfel ca:

$$\frac{\overline{u'v'}}{U_e^2} \simeq \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{K}(t)\,dt \cdot h\frac{dU_a}{d\eta_0}, U_a = U/U_e;\ \eta_0 = y/\delta,$$

$$h = \eta_0 - \eta_2;\quad \eta_2 = \frac{\int_0^y \overline{U^2}dy'}{\int_0^\delta U^2\,dy'}$$

unde $K = \frac{1}{T}\int_0^T \mathcal{K}(t)\,dt = K(\mathcal{R}e_{\psi_\delta}), \mathcal{R}e_{\psi_\delta} = \int_0^\delta U dy/\nu$.

Pentru $\mathcal{K}(\mathcal{R}e_{\psi_\delta}(t))$ se propune variaţia din figura 4.7.1. Considerînd, de exemplu, sistemul

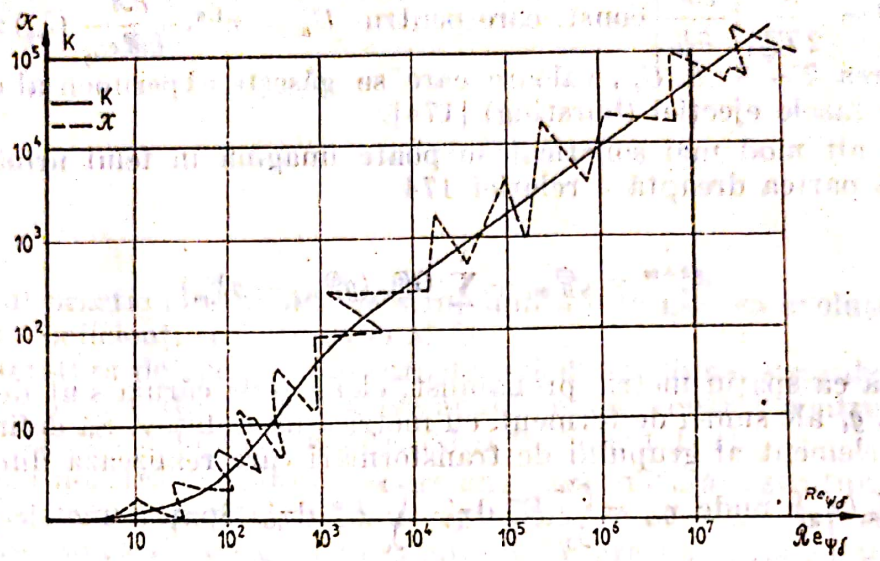


Fig. 4.7.1

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_f \frac{\partial u}{\partial y}\right) = u_t + u u_x + v u_y + \frac{1}{\rho} p_x$$

$$v = -\frac{\partial}{\partial x}\int_0^y u\,dy'$$

$$\frac{1}{\rho} p_y = -v_t - u v_x - v v_y + \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu_f \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$\nu_f = \nu[1 + \{\mathcal{K}\}_t h]$$

$$y = 0 : u = v = 0 \; ; y = \delta(x, t) : u = U_e, \frac{\partial u}{\partial y} = 0, p_e = -\rho_e U_e U_{e_x}$$

avem de rezolvat o ecuaţie de tip strat limită cu nestaţionaritate interioară $[\mathcal{K}(t)]$. Ecuaţia lui $\psi_\delta(\xi, \tau)$, obţinută în mod obişnuit pentru FID, este

$$F_{i_1}^{\oplus} \frac{\partial}{\partial \tau}(\psi_\delta^2) - \nu\int_0^1 u^2\,dh \frac{1}{T}\int_0^t \mathcal{K}\,dt' - 2F_{p_1}^{\oplus}\psi_\delta^2 = -$$

$$= -\left[F_{B_1}^{\oplus} \frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_\delta^2) + \nu U_e^2\right]$$

şi o soluţie de bază se obţine punînd $\psi_\delta = \tilde{\psi}_\delta(\xi) + \psi_{\delta_1}(\xi, \tau)$ ajungîndu-se la o ecuaţie cu derivate parţiale de tipul

$$\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi_{\delta_1}) - \frac{\nu}{2\tau\tilde{\psi}_\delta}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \psi_\delta}(\tilde{\psi}_\delta)\int_0^t \psi_{\delta_1}' d\tau \frac{\int_0^1 u^2\,du}{F_{i_1}^{\oplus}} - 2\frac{F_{p_1}^{\oplus}}{F_{i_1}^{\oplus}}\psi_{\delta_1} \simeq f(\xi)$$

a cărei soluție este obținută prin derivare $\frac{\partial}{\partial \tau}$ și care, pentru $F^{\oplus}_{\nu_1} \sim 0$: $\frac{d^2}{d\tau^2}(\psi_{\delta_1}) + Q\psi_{\delta_1} = 0$ dă soluția $\psi_{\delta_1} = A \sin(\omega\tau + \varphi)$. Rezultă frecvența $\omega^2 = \frac{\nu}{2T\tilde{\psi}_\delta}\left|\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \psi_\delta}\right|$ const. care pentru $U_a = \eta^{1/8}, \frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \mathcal{R}e_{\psi_\delta}}(\tilde{\psi}_\delta) \simeq 30$ dă valoarea $T \sim 8\ \delta/U_e$, valoare care se găsește experimental ca interval între fazele ejecției (bursting) [174].

Un alt mod mai sofisticat se poate imagina în felul următor: Se consideră partea dreaptă a relației 174

$$\mathcal{E}_a^{2+m} = g^{\oplus}_{B,m_1} + \sum_1^N G^{\oplus}_{t,m_1}(g^{\oplus}_{t,m_1} - g^{\oplus}_{B,m}).$$

organizată ca spațiu metric probabilist, elementele căruia sînt descompunerile g_B, g_t ale sumei de termeni, cu metrica lui Cebîșev. Să definim mișcarea ca element al grupului de transformări care realizează diferite distribuții $E_a(\eta_m)$, unde $\eta_m = \int_0^{\eta_0} E_a^m \, d\eta_0' \Big/ \int_0^1 E_a^m \, d\eta_0'$. Spațiul metric probabilizat astfel, are ca element aleator descompunerea și ca dinamică transformările de coordonate, realizate prin redistribuirea energiei pe direcția transversală a mișcării. Exact ca și în cazul difuziei, unde concentrația de substanță (de exemplu) este generatoarea procesului de difuzie, exprimat prin „mersul la întîmplare", tot astfel, în cazul unei curgeri cu gradient local puternic de viteză (energie cinetică), aceasta singură generează un proces de „pseudodifuzie" (dinamodifuzie) exprimat prin transformări de coordonate și descompuneri și cuplări ale termenilor ecuațiilor din FID. La stadiul actual acest model reprezintă doar o ipoteză teoretică de perspectivă.

3) Să arătăm acum semnificația transformării de coordonate în sensul FID privitor la mișcarea fluctuantă în curgerile cu gradient transversal al energiei cinetice. Într-adevăr, transformările de coordonate de tip von Mises generalizate $\eta_\varphi = \int_0^y \varphi(E) \, dy' \Big/ \int_0^\delta \varphi(E) dy'$, unde $E(y, t) \sim U^2$ este energia cinetică, care are gradienți importanți U_y, pot fi considerate ca realizate instantaneu prin transportul masei de fluid locale, transversal (după y) pe curent. În acest mod, se întîlnesc fizic cele două reprezentări instantanee ale mișcării fluidelor, cea lagrangeană și cea euleriană. O încercare de corelare a acestora a fost făcută de Kraichnan [88] care a definit viteza $\vec{V}(t_m/t, \vec{r})$ drept viteza la un moment t_m (deci viteza lagrangeană $\vec{V}(t_m)$) care la un moment t anterior sau ulterior a fost sau va fi în punctul $\vec{r}$ (deci viteza euleriană $u(r, t)$). Referindu-ne la cele două distribuții $E_a(\eta_0)$ și $E_a(\eta_2)$ se poate defini ușor cîmpul dintre cele două distribuții prin această reprezentare combinată lagrangeano-euleriană. Avem astfel $E_a(\eta_0 t_m/\eta_2, t)$ energia cinetică la momentul t_m care la momentul t se găsește la coordonata $\eta_2(\eta_0)$. Diferența $E_a^* - E_a$, care este o măsură a cîmpului fluctuațiilor, nu reprezintă altceva decît urmărirea unor particule lagrangeene ce se află pe distribuția fizică $E_a(\eta_0)$ sau pe cea transformată $E_a^*(\eta_0)$.

CAPITOLUL V

DETERMINAREA CARACTERISTICILOR STRATULUI LIMITĂ CU AJUTORUL FORMULĂRII INTEGRO-DIFERENȚIALE

Scopul practic al studiilor de strat limită este găsirea evoluției unor mărimi sau coeficienți caracteristici ai săi.

În literatura de specialitate caracteristicile medii ale stratului limită sînt obținute din relații aproximative analitice, dar separat pentru fiecare regim de curgere : laminar, tranzițional și turbulent [12].

Metoda noastră permite o tratare analitică unitară a stratului limită real care implică în evoluția sa toate regimurile de curgere. Expresia dată pentru „vîscozitatea" curgerii în capitolul IV are un caracter universal și poate fi folosită pentru toate curgerile incompresibile de tip strat limită. De asemenea, această metodă evidențiază influența diferitelor efecte ca : nivelul intern al fluctuațiilor, nivelul fluctuațiilor din curentul exterior, gradientul de presiune, curbura suprafețelor, forțele inerțiale de rotație, compresibilitatea, transferul de masă și de căldură la perete etc.

§ 5.1. Profilul de viteze

Dintre mărimile caracteristice ale stratului limită, grosimea și distribuțiile de viteze se obțin relativ ușor pe cale experimentală în comparație cu frecarea și transferul de căldură la perete. În acest paragraf vom deduce cu ajutorul formulării integro-diferențiale cîteva profile de viteză.

Fie grosimea stratului limită δ, coordonata perpendiculară pe direcția curgerii, cea în direcția curgerii x, și cea laterală z. Condițiile la limită pentru viteza $\vec{V}$ se pot scrie

$$u = u_0,\ v = v_0,\ w = w_0,\ \frac{\partial u}{\partial y} = q_{u_0},\ \frac{\partial v}{\partial y} = q'_{v_0},\ \frac{\partial w}{\partial y} = q_{w_0} \text{ la } y = 0,$$

(5.1.1)

$$u = U_e,\ v = V_e,\ w = W_e,\ \frac{\partial U}{\partial y} = q_{u_e},\ \frac{\partial v}{\partial y} = q'_{v_e},\ \frac{\partial w}{\partial y} = q_{w_e} \text{ la } y = \delta.$$

Viteza adimensională $u_a = (u - u_0)/(u_e - u_0)$ în funcție de $\eta_0 = y/\delta$, pentru o poziție $(x_1,\ z_1)$ fixă este cunoscută sub numele de „profil de viteze". Profilele celorlalte componente ale vitezei, adică v și w, prezintă importanță ca curgere secundară, iar valorile acestor componente sînt

Scanned with OKEN Scanner

mici în raport cu componenta u a curgerii principale din stratul limită și nu vor fi analizate de noi.

Pentru stratul limită incompresibil bidimensional trebuie să integrăm următorul sistem de ecuații :

$$(5.1.2)\qquad U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial x}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}\,,\qquad \frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0\,,$$

$$(5.1.3)\qquad P=p_w+\rho(\tilde{u}'^2-\tilde{v}'^2)\;;\; p_w+\frac{\rho}{2}U_e^2=p_\infty+\frac{\rho}{2}U_\infty^2$$

$$\tau=\mu[1+K(\eta_0-\eta_2)F(U_a)]\frac{\partial u}{\partial y}=\mu_f\frac{\partial U}{\partial y}.$$

Integrarea acestui sistem de ecuații prin formularea integro-diferențială dă pentru profilul de viteze următoarea expresie :

$$\frac{U^2}{U_e^2}=\frac{\nu}{\nu_f}\Bigg\{(\eta\,U_{a_\eta})^{\oplus}+U_{0_a}^2[1-(\eta U_{a_\eta})^{\oplus}]+$$

$$+\frac{2\psi_\delta^2}{\nu\,U_e^2}\frac{\mathrm{d}Ve}{\mathrm{d}\xi}\int_0^1\eta\left(\frac{1}{U_a+\dfrac{U_0}{U_e}(1-U_a)}-U_a\right)\mathrm{d}\eta\cdot$$

$$\cdot\left[\left(\frac{1}{U_a+\dfrac{U_0}{U_e}(1-U_a)}-U_a\right)^{\oplus}-(\eta\,U_{a_\eta})^{\oplus}\right]+$$

$$+\int_0^1 U^2/U_e^2\,\mathrm{d}\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)\left[\frac{\displaystyle\int_0^\eta\frac{U^2}{U_e^2}\mathrm{d}\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)}{\displaystyle\int_0^1\frac{U^2}{U_e^2}\mathrm{d}(\nu_f/\nu)}-(\eta\,U_{a_\eta})^{\oplus}\right]+$$

$$+\frac{2\psi_\delta}{U_e^2}q_e(\eta-(\eta U_{a_\eta})U]+\ldots\Bigg\}$$

Această expresie pentru $U(\xi,\eta)$ fiind complicată, pentru determinarea caracteristicilor stratului limită după prima aproximație avem nevoie doar de $U_a^{(0)}(\eta)$ furnizat de cazul stratului limită pe placa plană.

Interesul acestui caz constă nu numai în faptul că pot fi obținute soluții exacte ale ecuațiilor stratului limită laminar, dar mai ales în importanța practică a acestor soluții pentru numeroase probleme.

Corpurile studiate în aerodinamică sînt în general corpuri subțiri și carenate pe care variațiile vitezei exterioare și prin urmare gradienții longitudinali de presiune sînt moderați astfel că profilele de viteză expri-

Scanned with OKEN Scanner

mate în funcţie de η diferă puţin de acelea ale plăcii plane. Profilele în acest caz sînt date (§ 3.4) de expresia generală

$$U_{af}^2 = \frac{\nu}{\nu_f}\left\{(\eta U_{a_\eta})^{\oplus} + \int_0^1 U_a^2\, \mathrm{d}\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)\left[\frac{\int_0^\eta U_a^2\, \mathrm{d}(\nu_f/\nu)}{\int_0^1 U_a^2\, \mathrm{d}(\nu_f/\nu)} - (\eta U_{a_\eta})^{\oplus}\right]\right\}. \tag{5.1.4}$$

Analiza numerică a acestei ecuaţii integro-diferenţială efectuată pentru

$$\nu_f = \nu[1 + K(\mathscr{R}e_{\psi_\delta})\ (\eta_0 - \eta_2)], \text{ unde } \mathscr{R}e_{\psi_\delta} = \frac{\int_0^\delta U\, \mathrm{d}y}{\nu} \tag{5.1.5}$$

a arătat existenţa a două soluţii stabile, identificate după numărul de iteraţii necesare rezolvării lor numerice. Ecuaţia (5.1.4) conţine ca dată funcţia ν_f; se constată că netezimea soluţiei ei este sensibil afectată de netezimea acestei funcţii. A se vedea figura 5.1.1. Prima soluţie $K \to 0$ corespunde profilului laminar

$$U_a^2 = (\eta\ U_{a_\eta})^{\oplus}$$

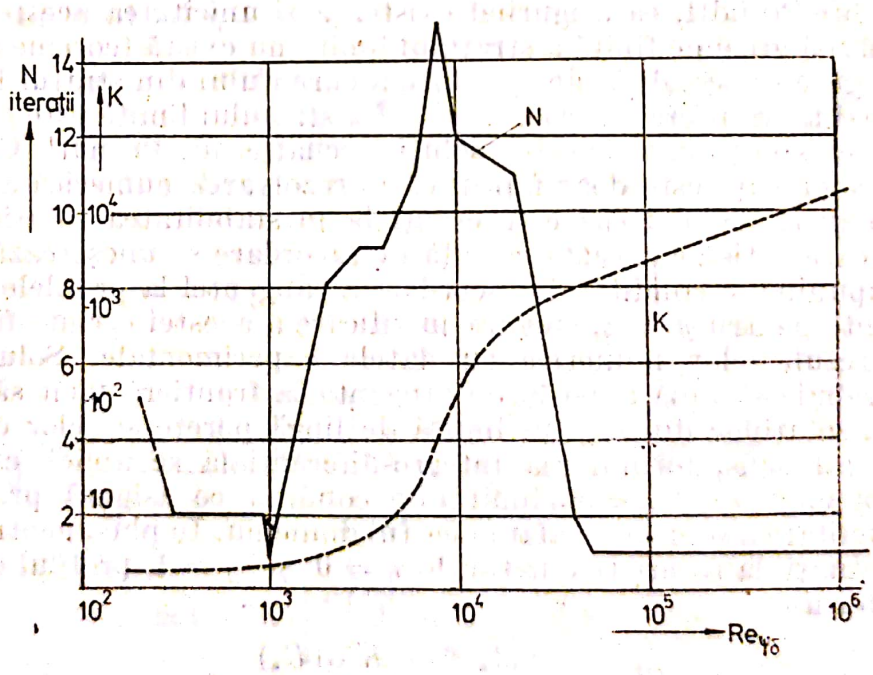


Fig. 5.1.1

care în primă aproximaţie (§ 3.4) este

$$U_a^{(0)}(\eta) = \sqrt{\eta\,(2 - \eta)}.$$

Scanned with OKEN Scanner

A doua soluție $K > 10^3$ corespunde unui profil de forma

$$U_a^{(0)} \simeq \eta^n, \frac{1}{8} < n < \frac{1}{5}.$$

Profilele din regimul tranziţional ($K \leqslant 500$) au mai degrabă un caracter formal, deoarece în mod natural ele corespund unor distribuţii instantanee instabile tinzînd către una sau cealaltă din cele două soluţii limită în funcţie de condiţiile particulare ale curgerii tranziţionale respective.

Să remarcăm că profilele în planul transformat sînt reprezentate prin curbe care diferă puţin de $\sqrt{\eta(2-\eta)}$ (proprietatea operatorului $\oplus$, notat în § 3.4 cu T, exprimată ca $\rho(Tf, T1) < \varepsilon$). Această trăsătură este foarte importantă pentru calculul celorlalte caracteristici ale stratului limită, nefiind necesară cunoaşterea precisă a curbei profilului.

§ 5.2. Frontierele stratului limită

În capitolul II s-a arătat că soluţiile ecuaţiilor lui Prandtl reprezintă dezvoltări asimptotice ale soluţiilor ecuaţiilor Navier-Stokes şi după principiul identificării din teoria asimptotică, pentru $y \to \infty$ soluţiile ecuaţiilor lui Prandtl se egalează cu soluţiile ecuaţiilor Navier-Stokes pentru $\nu = 0$ (deci ale ecuaţiilor lui Euler) la peretele $y = 0$. Această egalitate constituie condiţia la $y \to \infty$ pe care trebuie s-o satisfacă soluţia ecuaţiilor lui Prandtl, ea asigurînd existenţa şi unicitatea acestei soluţii. În teoria după grosime finită a stratului limită nu există teoreme analoage care să asigure că, condiţia de egalitate a curentului din stratul limită cu cel potenţial la frontiera exterioară $y = \delta$ a stratului limită este suficientă să implice existenţa şi unicitatea soluţiei ecuaţiei lui Prandtl. Ce putem afirma cu siguranţă este doar faptul că în rezolvarea numerică a ecuaţiei (5.1.2), condiţia de mai sus este esenţială în stabilitatea soluţiei. Clasa funcţiilor care satisfac această cerinţă de racordare se micşorează în mod practic impunînd şi condiţia de racordare a tangentei la profilele din cele două curente pentru $y = \delta$, singura justificare a acestei cerinţe fiind concordanţa rezultatelor numerice cu datele experimentale. Soluţia fizic valabilă trebuie să aibă o astfel de tangentă la frontieră încît să asigure racordarea soluţiilor din stratul limită de lîngă perete şi celor din exterior. În acest sens, formularea integro-diferenţială se aplică cu succes într-un domeniu $\eta_I < \eta < \eta_{II}$ limitat de condiţia ce asigură prelungirea prin continuitate a soluţiei în afara acestui domeniu. În plus, pentru curgerile cu fluctuaţii la frontierele naturale $\eta = 0$ şi $\eta = 1$, profilul de viteză scris sub forma

$$U_a^2 = \frac{(f_B)^{\oplus} + K\,G(U_a)}{1 + K(\eta_0 - \eta_2)F(U_a)} \tag{5.2.1}$$

$$G(U_a) = \int_0^1 U_a^2\, \mathrm{d}[(\eta_0 - \eta_2)\, F(U_a)] \left[\frac{\int_0^1 U_a^2\, \mathrm{d}(\nu_f/\nu)}{\int_0^1 U_a^2\, \mathrm{d}(\nu_f/\nu)} - (\eta U_{a_\eta})^{\oplus} \right]$$

admite comportări asimptotice laminare. În adevăr, pentru $K = 0$ avem $U_a^2 = (f_B)^{\oplus}$ în tot domeniul considerat $0 \leqslant \eta_0 \leqslant 1$ iar pentru K mare dar finit, $(\eta_0 - \eta_2)$ tinde la zero pentru $\eta \to 0$ sau $\eta \to 1$; în același timp, $G(U_a) \to 0$ și deci, și în acest caz, $U_a^2 = (f_B)^{\oplus}|_{\eta \to 0}$ sau $\eta \to 1$. Din această existență matematică în special a „superlayer"-ului (dovedită experimental) — zona exterioară laminară de frontieră a stratului limită turbulent — rezultă că într-adevăr „vîscozitatea" turbulentă datorată fluctuațiilor depinde de corelația $\widetilde{u'v'}$ și nu de $(\widetilde{u'^2} + \widetilde{v'^2} + \widetilde{w'^2})$, de exemplu. Acest fapt se explică fizic prin aceea că în curgerea exterioară ($\tilde{U}_e(\eta) \simeq$ const.) turbulentă avem $\widetilde{u'^2} + \widetilde{v'^2} + \widetilde{w'^2} \neq 0$ dar $\widetilde{u'v'} \simeq 0$ și constituie o confirmare a valabilității fizice a modelului propus de noi.

În privința „sublayer-ului" — zona laminară de lîngă perete — trebuie remarcat că

$$\left|\frac{\partial U_a}{\partial y}\right|_{\substack{y\to 0\\ K\to 0}} \neq \left|\frac{\partial U_a}{\partial y}\right|_{\substack{y\to 0\\ K=0}}$$

ceea ce matematic era de așteptat, căci, deși profilele U_a pentru cazul laminar ($K = 0$) și turbulent ($K \neq 0$) se apropie de aceeași limită pentru $\eta \to 0$ (cînd de altfel și $K \to 0$), totuși tangentele la aceste profile nu sînt obligate să aibă aceeași racordare.

O primă modalitate de determinare a grosimii celor două substraturi laminare care bordează stratul limită turbulent este aceea prin care se definește de obicei grosimea stratului limită și care corespunde acelui η pentru care diferența dintre U_a (determinat numeric) și U_e este mai mică decît 0,01. O a doua modalitate este aceea de a dezvolta membrul drept al lui (5.2.1) în jurul lui $\eta = 0$:

$$U_a^2(\eta) = \frac{f_B^{\oplus}\Big|_{\eta=0} + \dfrac{\partial(f_B^{\oplus})}{\partial\eta}\Big|_{\eta=0}\Delta\eta + KG|_{\eta=0} + K\left(\dfrac{\partial G}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}\Delta\eta}{1 + K(\eta_0 - \eta_2)|_{\eta=0} + K\left(\dfrac{\partial(\eta_0 - \eta_2)}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}\Delta\eta} \simeq$$

$$\simeq \Delta\eta\left[\left(\frac{\partial(f_B^{\oplus})}{\partial\eta}\right)_{\eta=0} + K\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)_{\eta=0}\right]$$

sau $\eta = 1$

$$U_a^2(\eta) = \frac{f_B^{\oplus}\Big|_{\eta=1} - \left(\dfrac{\partial(f_B^{\oplus})}{\partial\eta}\right)\Big|_{\eta=1}\Delta\eta + KG\Big|_{\eta=1} - K\left(\dfrac{\partial G}{\partial\eta}\right)_{\eta=1}\Delta\eta}{1 + K(\eta_0 - \eta_2)|_{\eta=1} + K\left(\dfrac{\partial(\eta_0 - \eta_2)}{\partial\eta}\right)_{\eta=1}\Delta\eta} \simeq$$

$$\simeq 1 - \Delta\eta\left[\frac{\partial(f_B^{\oplus})}{\partial\eta} + K\left(\frac{\partial G}{\partial\eta}\right)_{\eta=1}\right]$$

oprindu-ne la termeni în $\Delta\eta$; atunci grosimea „sublayer"-ului este $\Delta\eta$ unde $\Delta\eta$ este dată de una din cele două relații de mai sus.

Transformarea inversă oferă direct grosimea δ a stratului limită

$$\delta(x) = y|_{\eta=1} = \psi_\delta \int_0^1 U_a^{-1}(\eta')\,\mathrm{d}\,\eta'. \tag{2.5.2}$$

Scanned with OKEN Scanner

Această expresie depinde în principal de două mărimi : profilul de viteze, pe care l-am discutat în § 5.1 și de mărimea ψ_δ, pe care o vom deduce în cele ce urmează.

Formularea integro-diferențială a sistemului (5.1.2) dă pentru această mărime următoarea ecuație diferențială :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathcal{R}e_\xi}(\mathcal{R}e_{\psi_\delta})^2 + 2AC\frac{1}{U_{e_a}}\frac{\mathrm{d}U_{e_a}}{\mathrm{d}\mathcal{R}e_\xi}(\mathcal{R}e_{\psi_\delta})^2 + \tag{5.2.3}$$

$$+ U_{e_a}C[Bk\,\mathcal{R}e^s_{\psi_\delta}(1 - e^{a\mathcal{R}e^q_{\psi_\delta}})^r - 1] = 0,$$

cu $\mathcal{R}e_{\psi_\delta}(0) = 0$. În această ecuație s-au introdus următoarele notații :

$$U_{e_a}(\mathcal{R}e_\xi) = U_e/U_\infty, \mathcal{R}e_\xi = \frac{U_\infty \xi}{\nu}, \; A = \int_0^1 \eta\,(U_a^{-1} - U_a)\,\mathrm{d}\eta; \quad B =$$

$$= \int_0^1 U_a^2\,\mathrm{d}[U_a(\eta_0 - \eta_2)]; C = \left[\int_0^1 \eta^2\,\mathrm{d}\,U_a\right]^{-1}.$$

Ecuația diferențială neliniară (5.2.3) are ca trăsătură importantă faptul că are două soluții asimptotice și anume : soluția laminară, obținută pentru $e^{a\mathcal{R}e^q_{\psi_\delta}} \to 1$:

$$\mathcal{R}e^2_{\psi_{\delta_L}} = C\,\frac{\int_0^{\mathcal{R}e_x} U_{e_a}^{1+2AC}\,\mathrm{d}\mathcal{R}e_\xi}{U_{e_a}^{2AC}} \tag{5.2.4}$$

și soluția turbulentă obținută pentru $e^{\mathcal{R}e^q_{\psi_\delta}} \to 0$, $Bk\mathcal{R}e^s_{\psi_\delta} >> 1$,

$$\mathcal{R}e^{2-s}_{\psi_{\delta_T}} = -\frac{2-s}{2}BCk\,\frac{\int_0^{\mathcal{R}e_x} U_{e_a}^{1+(2-s)AC}\,\mathrm{d}\mathcal{R}e_\xi}{U_{e_a}^{(2-s)AC}} \tag{5.2.5}$$

Pentru regimul tranzițional vom folosi o metodă de rezolvare prin aproximații succesive, introducînd în ecuație soluția turbulentă pentru liniarizarea acesteia. Astfel, ecuația (5.2.3) are acum următoarea formă [107]

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathcal{R}e_\xi}(\mathcal{R}e_{\psi_\delta})^2 + 2AC\frac{1}{U_{e_a}}\cdot\frac{\mathrm{d}U_{e_a}}{\mathrm{d}\mathcal{R}e_\xi}(\mathcal{R}e_{\psi_\delta})^2 +$$

$$+ U_{e_a}C[Bk\,\mathcal{R}e^s_{\psi_{\delta_T}}\,1 - e^{a\mathcal{R}e^q_{\psi_{\delta_T}}})^r - 1] = 0,$$

a cărei soluție

$$\mathcal{R}e^2_{\psi_\delta} = \frac{C\int_\theta^{\mathcal{R}e_x} U_{e_a}^{1+2AC}\,[1 - Bk\,\mathcal{R}e^s_{\psi_{\delta_T}}(1 - e^{a\mathcal{R}e^q_{\psi_{\delta_T}}})^r]\,\mathrm{d}\mathcal{R}e_\xi}{U_{e_a}^{2AC}} \tag{5.2.6}$$

reprezintă prima aproximație a soluției ecuației (5.2.3).

Scanned with OKEN Scanner

Evident, această expresie se împarte în trei contribuţii

$$\mathcal{R}e^2_{\psi_\delta} = \mathcal{R}e^2_{\psi_{\delta L}} + \mathcal{R}e^2_{\psi_{\delta T}}(1 - \Phi_{TR}) \tag{5.2.7}$$

în care $\mathcal{R}e_{\psi_{\delta L}}$ şi $\mathcal{R}e_{\psi_{\delta T}}$ sînt date de (5.2.4) şi (5.2.5) iar Φ_{TR} reprezintă partea datorată tranziţiei

$$\Phi_{RT} = \frac{\int_0^{\mathcal{R}e_x} U_{e_a}^{1+2AC}\, \mathcal{R}e^s_{\psi_{\delta T}}[1 - (1 - e^{a\mathcal{R}e^q_{\psi_{\delta T}}})^r]\,d\mathcal{R}e_\xi}{\int_0^{\mathcal{R}e_x} U_{e_a}^{1+2AC}\, \mathcal{R}e^s_{\psi_{\delta T}}\,d\mathcal{R}e_\xi}$$

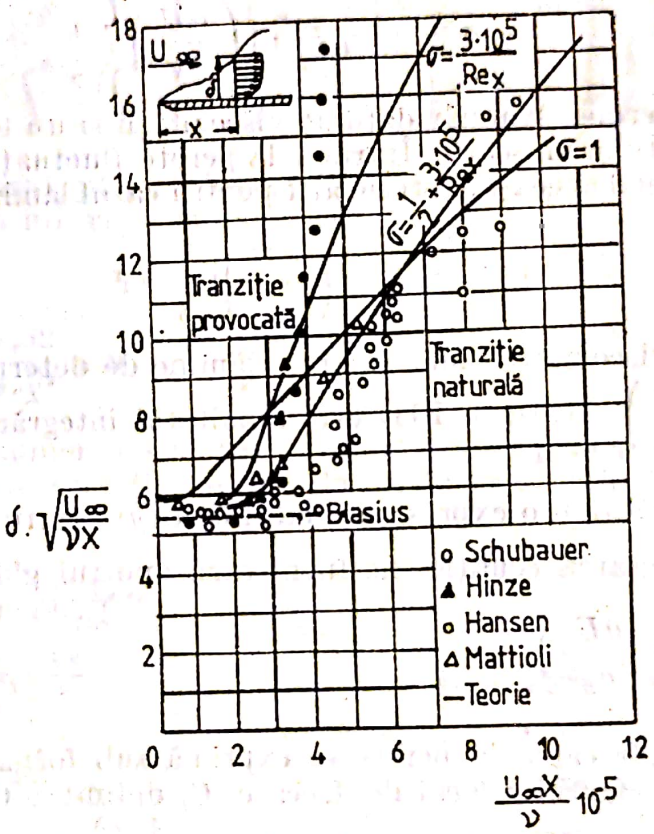


Fig. 5.2.1

Cu ajutorul lui (5.2.6) putem calcula grosimea δ a stratului limită din (5.2.2) utilizînd profilul determinat în § 5.1, obţinîndu-se o expresie similară cu (5.2.7), [189],

$$(\delta/X)^2 = (\delta/X)^2_L + (\delta/X)^2_T(1 - \Phi_{TR}),$$

unde

$$1 - \Phi_{TR} = \left[1 - 1{,}6\int_0^1 \zeta_a^{0,6}\, e^{-0{,}315\cdot10^{-4{,}75}\mathcal{R}e_x^{0,84}\zeta_a^{0,84}}\, d\zeta_a\right]^{1+\sigma},$$

$$\zeta_a = \mathcal{R}e_\xi/\mathcal{R}e_X\,;\ (\delta/X)_L = \frac{5{,}4}{\mathcal{R}e_X^{1/2}}\,;\ (\delta/X)_T = \frac{0{,}376}{\mathcal{R}e_X^{1/5}}.$$

Parametrul σ include tranziţia provocată artificial sub forma $\sigma = \mathcal{R}e_{X_p}/\mathcal{R}e_X, \mathcal{R}e_{X_p} = \frac{U_\infty X_p}{\nu}$, tranziţia artificială fiind provocată în X_p. Rezultate numerice sînt date în figura 5.2.1. [67], [109], [195].

Scanned with OKEN Scanner

§ 5.3. Frecarea și desprinderea

Frecarea la perete și fenomenul de desprindere fiind elementele principale care determină rezistența la înaintare a corpurilor aerodinamice în fluid incompresibil, ele reprezintă caracteristici importante ale stratului limită.

Forța de frecare exercitată în interiorul stratului limită pe unitatea de suprafață este legată în general (vezi cap. IV), de gradientul normal al vitezei printr-o relație de timp newtonian

$$\tau = \tau_l + \tau_t = \mu_f \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$$

cuprinzînd un termen laminar datorat vîscozității și un termen turbulent datorat fluctuațiilor mișcării. Întrucît la perete fluctuațiile se anulează, frecarea are formal aceeași expresie atît pentru cazul laminar, cît și pentru cel fluctuant

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}$$

în care μ este vîscozitatea moleculară. Rămîne de determinat gradientul la perete $\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}$ care în FID este rezultatul integrării sistemului de ecuații (5.1.2).

(Deci nu căutăm o expresie exactă fluid $U(y)$ pentru a găsi local pe $\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)$, ci integrarea ecuației ne furnizează aportul global al stratului în expresia lui $\left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=0}$.

De obicei, frecarea la perete se exprimă sub formă adimensională cu ajutorul coeficientului local de frecare C_f definit ca $C_f = \tau_w [\rho/q U_\infty^2]^{-1}$ și a coeficientului mediu de frecare K_f, $K_f = \frac{1}{X} \int_0^X C_f(x)\, \mathrm{d}x =$

$= \frac{1}{\mathcal{R}e_X} \int_0^{\mathcal{R}e_x} C_f(\mathcal{R}e_x)\, \mathrm{d}\mathcal{R}e_x$ în care $\mathcal{R}e_x = \frac{U_\infty x}{\nu}$, $\mathcal{R}e_X = \frac{U_\infty X}{\nu}$.

Prima integrare, care conduce la FID, furnizează direct expresia coeficientului local de frecare

$$C_f = \frac{U_e}{U_\infty} \frac{1}{\mathcal{R}e_{\psi_\delta}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathcal{R}e_\xi} (\mathcal{R}e_{\psi_\delta})^2 \int_0^1 \eta \frac{\partial U_a}{\partial \eta} \mathrm{d}\eta +$$

$$+ 2\mathcal{R}e_{\psi_\delta} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mathcal{R}e_\xi} \left(\frac{U_e}{U_\infty} \right) \int_0^1 \left(\frac{1}{U_a} - U_a \right) \mathrm{d}\eta -$$

$$- 2 \left(\frac{U_e}{U_\infty} \right)^2 \mathcal{R}e_{\psi_\delta} \int_0^1 \frac{\partial U_a}{\partial \mathcal{R}e_\xi} \mathrm{d}\eta - 2 \frac{U_\infty}{U_e} \mathcal{R}e_{\psi_\delta} \int_0^1 \frac{1}{U_a} \frac{\partial}{\partial \mathcal{R}e_\xi} \left(\frac{\widetilde{u'^2} - \widetilde{v'^2}}{U_\infty^2} \right) \mathrm{d}\eta$$

Scanned with OKEN Scanner

Cu ajutorul acestei relații și a ecuației lui $\mathcal{R}e_{\psi_\delta}$ se găsește pentru K_f următoarea relație

$$K_f = 2\left(\int_0^1 \eta \frac{\partial U_a}{\partial \eta}\, d\eta\right)\frac{U_e}{U_\infty}\frac{\mathcal{R}e_{\psi\delta}}{\mathcal{R}e_X} + 2\left[-\int_0^1 \eta \frac{\partial U_a}{\partial \eta}\, d\eta + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 \left(\frac{1}{U_a} - U_a\right) d\eta\right] \frac{1}{\mathcal{R}e_X}\int_0^{\mathcal{R}e_X} \mathcal{R}e_{\psi_\delta}\, d\left(\frac{U_e}{U_\infty}\right) -$$

$$- \frac{2}{\mathcal{R}e_X}\int_0^{\mathcal{R}e_X} \mathcal{R}e_{\psi_\delta}\left(\frac{U_e}{U_\infty}\right)^2 \left(\int_0^1 \frac{\partial u_a}{\partial \xi}\, d\eta\right) d\mathcal{R}e_\xi -$$

$$- \frac{2}{\mathcal{R}e_X}\int_0^{\mathcal{R}e_X} \left(\int_0^1 \frac{1}{U_a}\frac{\partial}{\partial \mathcal{R}e_\xi}\left(\frac{\overline{u'^2}\,\overline{v'^2}}{U_a^2}\right) d\eta\right)\frac{U_\infty}{U_e}\, \mathcal{R}e_{\psi_\delta}\, d\mathcal{R}e_\xi .$$

Pentru cazul plăcii plane, $U_e = U_\infty$ și $U_a = U_a(\eta)$, utilizînd expresia (5.2.7) a lui $\mathcal{R}e_{\psi_\delta}$, putem scrie

$$K_f^2 = K_{fL}^2 + K_{fT}^2(1 - \Phi_{TR})$$

în care $K_{fL} = \dfrac{1{,}32}{\mathcal{R}e_X^{1/2}}$, $K_{fT} = \dfrac{0{,}073}{\mathcal{R}e_X^{1/5}}$.

Rezultate numerice sînt date în figura 5.3.1 pentru diferite expresii ale parametrului σ care ține seama de producerea artificială a tranziției [189].

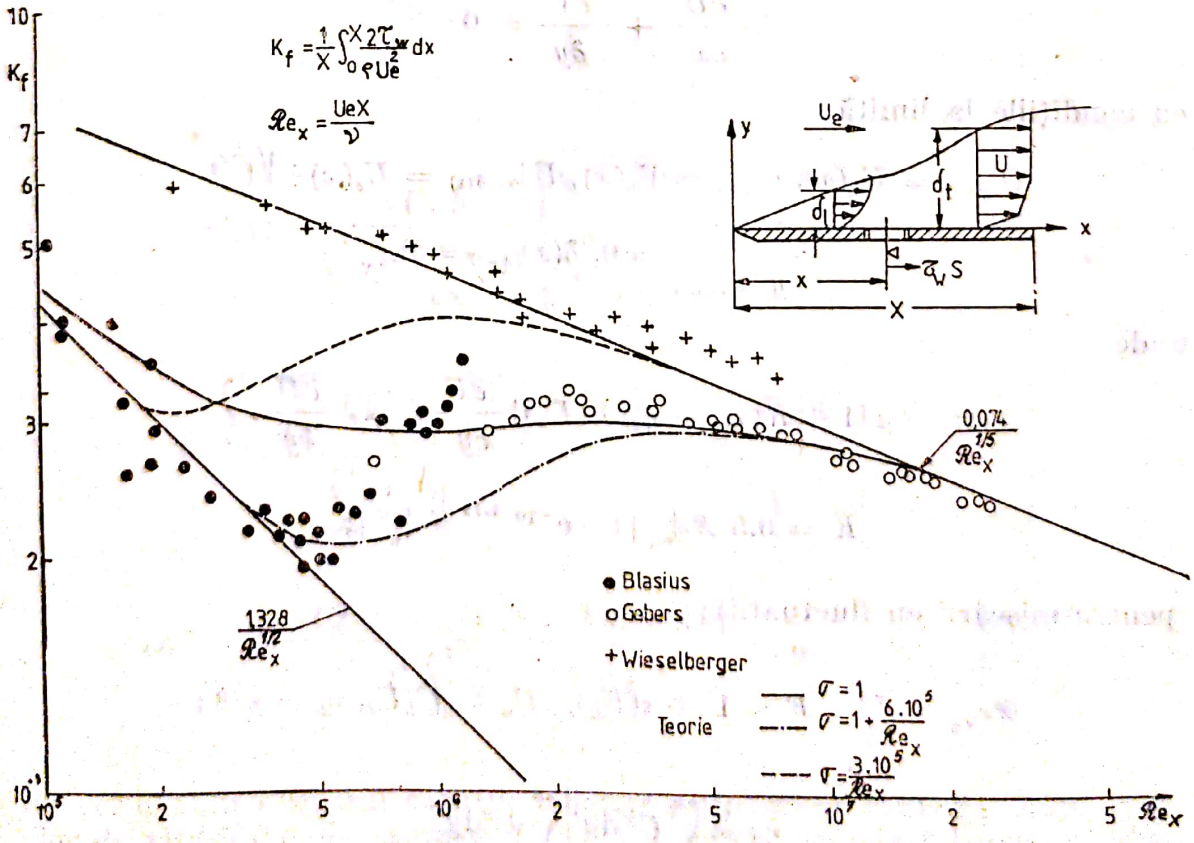


Fig. 5.3.1

Scanned with OKEN Scanner

Pentru stratul limită, atît laminar cît și turbulent, factorul principal care influențează forma profilului de viteze este gradientul longitudinal de presiune. Modificări importante ale profilului de viteze au loc pentru o curgere exterioară încetinită, adică pentru un gradient de presiune pozitiv. Forțele de presiune se opun mișcării avînd un efect de frînare, care este mai mare în zona vitezelor mici, adică pentru $y/\delta \to 0$. Dacă gradientul de presiune este suficient de mare, viteza particulelor fluidului în apropierea peretelui se anulează și-și schimbă sensul ; acesta este fenomenul de desprindere (§ 1.2), prin care stratul limită este deviat și se separă de perete dezvoltîndu-se la o distanță de acesta. Punctul de desprindere (a cărui abscisă s-o notăm cu x_s) este punctul limită, în amontele căruia viteza în imediata vecinătate a peretelui este pozitivă și în avalul căruia este dirijată în sens invers curgerii generale. Acest punct se caracterizează deci prin condiția $\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=0} = 0$ sau echivalent prin $C_f(x_s) = 0$.

În cele de mai jos vom da ecuația pe care o verifică x_s în cazul curgerilor cu sau fără fluctuații pentru $U_e = (1 - \xi)\, U_\infty$ [15]. Pentru aceasta se scriu ecuațiile stratului limită sub forma

$$U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} - U_e\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_f}{\partial y},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} \simeq 0 \tag{5.3.1}$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

cu condițiile la limită

$$U|_{y=0} = U_0(x),\ v|_{y=0} = V_0(x),\ U|_{y=\delta(x)} = U_e(x) + \sqrt{\widetilde{U_0'^2}}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_{y=\delta(x)} = 0,\ \delta(x)|_{x=0} = 0.$$

unde

$$\tau_f = \mu[1 + K(\eta_0 - \eta_2)\, F(U_a)]\frac{\partial U}{\partial y} = \mu_f\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$K = 0{,}5\, \mathcal{R}e_{\psi_\delta}^{3/4}\left[1 - \mathrm{e}^{-10^{-4{,}75}\, \mathcal{R}e_{\psi_\delta}^{1{,}05}}\right];$$

pentru mișcării cu fluctuații) ;

$$\mathcal{R}e_{\psi_\delta} = \frac{\psi_\delta}{\nu},\ F = 1 + \varepsilon(U_a),\ U_a = U/U_e,\ \eta_0 = y/\delta ;$$

$$\eta_2 = \int_0^y U^2\,\mathrm{d}y' \Big/ \int_0^\delta U^2\,\mathrm{d}y'.$$

Scanned with OKEN Scanner

Efectuînd transformarea de coordonate a lui Săvulescu-Ferrari, obținem pentru $C_f(\xi)$ expresia

$$C_f(\xi) = \frac{2}{U_\infty^2}\left[\frac{dU_e}{d\xi}\psi_\delta\int_0^1\left(\frac{1}{U_a} - U_a\right)d\eta + U_e\frac{d\psi_\delta}{d\xi}\int_0^1 \eta\, dU_a + V_0(U_0 - U_e)\right]$$

abscisa punctului de desprindere ξ_s obținîndu-se din ecuația algebrică $C_f(\xi_s) = 0$.

$\psi_\delta(\xi)$ din expresia lui $C_f(\xi)$ este soluție a problemei Cauchy $\psi_\delta(0) = 0$ pentru ecuația diferențială de ordin întîi:

$$\frac{d}{d\xi}(\psi_\delta^2) + 2A(\xi)\psi_\delta^2 + 2B(\xi)\,V_0(\xi)\psi_\delta + C(\xi, \psi_\delta) + D(\xi) = 0$$

unde

$$A(\xi) = \frac{1}{U_e}\frac{dU_e}{d\xi}\frac{\int_0^1 \eta\left(\frac{1}{U_a} - U_a\right)d\eta}{\int_0^1 \eta^2\frac{\partial U_a}{\partial \eta}\,\partial\eta} = \frac{\int_0^1 \eta\frac{\partial U_a}{\partial \xi}d\eta}{\int_0^1 \eta^2\frac{\partial U_a}{\partial \eta}d\eta};$$

$$B(\xi) = -\frac{\int_0^1 (1 - U_a)d\eta}{\int_0^1 \eta^2\frac{\partial U_a}{\partial \eta}\,\partial\eta};$$

$$C(\xi) = \frac{\nu U_e K}{\int_0^1 \eta^2\frac{\partial U_a}{\partial \eta}d\eta}\left\{\frac{\int_0^1 F U_a\, d\eta}{\int_0^1 U_a^{-1}\, d\eta} - \frac{\int_0^1 F U_a^3\, d\eta}{\int_0^1 U_a\, d\eta} + \right.$$

$$\left. + \frac{\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial \eta}U_a^2\left(\int_0^\eta \frac{d\eta'}{U_a}\right)d\eta}{\int_0^1 U_a^{-1}d\eta} - \frac{\int_0^1 \frac{\partial F}{\partial \eta}U_a^2\left(\int_0^\eta U_a\, d\eta'\right)d\eta}{\int_0^1 U_a d\eta}\right\}$$

$$D(\xi) = \frac{\nu U_0^2 - \nu U_e^2(1 + 2\,Tu_e + Tu_e^2)}{U_e\int_0^1 \eta^2\frac{\partial U_a}{\partial \eta}\,d\eta}, \text{ unde } Tu_e = \sqrt{\frac{\widetilde{U_e'^2}}{U_e}}.$$

Se vor examina separat cazurile laminar și turbulent pentru profilul exterior de viteză dat de expresia $U_e = (1 - \xi)\,U_\infty$. În cazul turbulent F se va considera egal cu 1.

Scanned with OKEN Scanner

În cazul laminar fără transfer de masă avem $\nu_f = \nu$, $K(\mathcal{R}e_{\psi_\delta}) = 0$; $V_0(\xi) = 0$; $U_0(\xi) = 0$; iar după discuția din capitolul III în primă aproximație punem $U_a = U_a(\eta) = \sqrt{\eta(2-\eta)}$.

Acest caz a fost analizat în § 1.3; calcule numerice conduc la valoarea $\xi_s = 0{,}120$ pentru punctul de desprindere.

În cazul turbulenței complet dezvoltate, fără transfer de masă, avem $K(\mathcal{R}e_{\psi_\delta}) = k_0 \mathcal{R}e^s_{\psi_\delta}$, unde $k_0 = 0{,}5$, $p = 3/4$, astfel că $\nu_f \simeq \nu k_0 \mathcal{R}e^p_{\psi_{\delta_T}} (\eta_0 - \eta_{12})$ și problema Cauchy pentru ψ_{δ_T} devine

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\psi^2_{\delta_T}) + A\frac{1}{U_e}\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}\xi}\psi^2_{\delta_T} + BU_e k_0 \nu^{1-p}\psi^n_{\delta_T} = 0, \tag{5.3.2}$$

unde $A = \dfrac{3\pi - 8}{10 - 3\pi}$, $B = -\dfrac{3}{2}\dfrac{1}{10 - 3\pi}$.

Deci φ_{δ_T} este soluție a ecuației (5.3.2) de tip Bernoulli și are expresia

$$\psi_{\delta_T} = \left\{\frac{15\, k_0 \nu^{1/4}}{2(120 - 33\pi)} U_\infty \left[(1-\xi)^{-\frac{5}{8}\frac{3\pi-8}{10-3\pi}} - (1-\xi)^2\right]\right\}^{4/5},$$

care, introdusă în formula pentru $C_f(\xi)$, conduce la abscisa $\xi_s = 0{,}200$ a punctului de desprindere.

§ 5.4. Transferul de căldură la perete

Aplicarea metodei integro-diferențiale pentru determinarea transferului de căldură la perete nu comportă nici o dificultate de principiu, deoarece ecuația temperaturii este de același tip ca și ecuația impulsului (Cap. III). Precizăm că este vorba de cazul convecției forțate, cînd cîmpul de viteze este neafectat de cîmpul de temperatură, aceste cîmpuri putînd fi determinate succesiv. În aplicațiile practice însă se ivesc următoarele probleme:

1) Grosimea δ_T a stratului limită „termic" nu coincide cu δ, grosimea stratului dinamic;

2) Profilele de viteză raportate la $U_e(y = \delta)$ și cele de temperatură raportate la $T_e(y = \delta_T)$ sînt diferite;

3) Trebuie introduse două coordonate integrale de transformare (3.2.1) astfel: pentru ecuația impulsului luăm $\varphi_u = u$ iar pentru ecuația temperaturii luăm $\varphi_T = T$ și avem corespunzător η_T;

4) Trebuie găsită o funcție $\varphi(u, T)$ pentru coordonata η_e de tipul (3.2.1) pentru a caracteriza cîmpul de fluctuații mixt (de viteză și temperatură) deoarece considerăm cazul convecției forțate. În particular, acest cîmp este caracterizat de corelația de ordinul doi de temperatură-viteză $(\widetilde{u'T'}, \widetilde{v'T'})$;

5) Pentru curgerile cu fluctuații de viteză și temperatură, pe lîngă expresia pentru K, care apare în formula „vîscozității" turbulente, trebuie introdusă o formulă similară pentru $K_T = K_T(\mathcal{R}e_{\psi_{\delta_T}}, \mathscr{P}r)$ cu ajutorul căruia se dă expresia pentru coeficientul λ_f de transfer de căldură în regim fluctuant.

Scanned with OKEN Scanner

În capitolul IV, pe baza prelucrării datelor experimentale [81] s-a propus următoarea formulă pentru acest coeficient [188]

$$K_T\,(\mathscr{R}e_{\psi_{\delta_T}},\ \mathscr{P}r) = 2K(\mathscr{R}e_{\psi_{\delta_T}})\ \mathscr{P}r^{1/6}$$

în care $\mathscr{R}e_{\psi_{\delta_T}} = \dfrac{1}{\nu}\int_0^{\delta_T} U\,dy$, $\mathscr{P}r = \dfrac{c_p\,\mu}{\lambda}$.

Vom da un exemplu de aplicare pentru determinarea transferului pornind de la ecuaţiile stratului limită termic incompresibil bidimensional

$$\rho U U_x + \rho V U_y + \rho U_e U_{e_x} = \frac{\partial}{\partial y}(\mu_f\, U_y),$$

$$c_p U T_x + \rho c_p V T_y = \frac{\partial}{\partial y}(\lambda_f\, T_y) + \mu\, U_y^2, \tag{5.4.1}$$

$$U_x + V_y = 0,$$

în condiţiile la limită

$$U = V = 0, \quad T = T_w \ \text{la} \ y = 0,$$

$$U = U_e, \quad U_y \approx 0 \ \text{la} \ y = \delta(x),$$

$$T = T_e, \quad T_y \approx 0 \ \text{la} \ y = \delta_T(x),$$

unde

$$\mu_f = \mu[1 + K(\eta_0 - \eta_2)];\quad \lambda_f = \lambda\,[1 + K_T\,(\eta_{0_T} - \eta_{2_T})];$$

$$\eta_0 = y/\delta;\ \eta_2 = \int_0^y U^2\,dy \Big/ \int_0^{\delta} U^2\,dy;\ \eta_{0_T} = y/\delta_T;\ \eta_{2_T} = \int_0^y E_{a_T}\,dy \Big/ \int_0^{\delta} E_{a_T}\,dy,$$

$$E_{a_T} = \frac{(c_p T + U^2/2) - (c_p T + U^2/2)_w}{(c_p T + U^2/2)_e - (c_p T + U^2/2)_w}.$$

Sistemul (5.4.1) se decuplează, stratul limită dinamic cu variabilele lui Săvulescu-Ferrari furnizînd profilul de viteză (5.2.1), coeficientul de frecare mediu $K_f = 1/\mathscr{R}e_x \cdot \int_0^{\mathscr{R}e_x} C_f(\mathscr{R}e_x)\,d\mathscr{R}e_x$ (§ 5.3) şi ecuaţia (5.2.3) pentru ψ_δ.

Cu ajutorul transformării de coordonate $\xi = x$, $\eta_T = \int_0^y T_a\,dy' \Big/ \int_0^{\delta_T} T_a\,dy' = \psi_T/\psi_{\delta_T}$, unde $T_a = \dfrac{T - T_w}{T_e - T_w} = \Delta/\Delta_T$, se obţine

ecuaţia integro-diferenţială a lui T_a^2 sub forma

$$T_a^2 = \frac{\lambda}{\lambda_f}\left\{\int_0^{\eta_T} T_a^2\,\mathrm{d}\left(\frac{\lambda_f}{\lambda}\right)+\int_0^1 \frac{\lambda_f}{\lambda}\,\mathrm{d}(T_a^2)h_B^{\oplus}+\right.$$

$$+2\psi_{\delta_T}^2\mathscr{P}r\frac{U_e}{\nu}\frac{1}{\Delta_T}\frac{\mathrm{d}T_w}{\mathrm{d}\xi}\left[\left(\frac{U_a}{T_a}\right)^{\oplus}-h_B^{\oplus}\right]+$$

$$+2\psi_{\delta_T}^2\mathscr{P}r\frac{U_e}{\nu}\frac{1}{\Delta_T}\frac{\mathrm{d}\,\Delta_T}{\mathrm{d}\xi}[(U_a)^{\oplus}-h_B^{\oplus}]-$$

$$-2\psi_{\delta_T}^2\mathscr{P}r\frac{U_e}{\nu}\frac{1}{U_e}\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}\,\xi}\left[\left(T_a\int_0^{\eta_T}\frac{U_a}{T_a}\,\mathrm{d}\eta_T'\right)^{\oplus}-h_B^{\oplus}\right]+$$

$$\left.+2\frac{U_e^2}{C_p\Delta_T}\mathscr{P}r\left[\left(T_a\left(\frac{\partial U_a}{\partial\eta_T}\right)^2\right)^{\oplus}-h_B^{\oplus}\right]\right\}$$

unde $h_B=\dfrac{\partial T_a}{\partial\eta_T}\displaystyle\int_0^{\eta_T}\frac{U_a}{T_a}\,\mathrm{d}\eta_T$, şi ecuaţia lui ψ_{δ_T}

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}(\psi_{\delta_T}^2)-$$

$$-2\frac{\dfrac{(T_w)_\xi}{\Delta_T}\displaystyle\int_0^1\eta_T\frac{U_a}{T_a}\mathrm{d}\eta_T+\frac{(\Delta_T)_\xi}{\Delta_T}\int_0^1\eta_T U_a\,\mathrm{d}\eta_T-\frac{(U_e)_\xi}{U_e}\int_0^1\eta_T T_a\left(\int_0^{\eta_T}\frac{U_a}{T_a}\,\mathrm{d}\eta_T'\right)\mathrm{d}\eta_T}{\displaystyle\int_0^1\eta_T\frac{\partial T_a}{\partial\eta_T}\left(\int_0^{\eta_T}\frac{U_a}{T_a}\,\mathrm{d}\eta_T'\right)\mathrm{d}\eta_T}\psi_{\delta_T}^2+$$

$$+2\frac{U_e\,\nu}{C_p\,\Delta_T}\frac{\displaystyle\int_0^1\eta_T T_a\left(\frac{\partial U_a}{\partial\eta_T}\right)^2\mathrm{d}\eta_T}{\displaystyle\int_0^1\eta_T\frac{\partial T_a}{\partial\eta_T}\left(\int_0^{\eta_T}\frac{U_a}{T_a}\,\mathrm{d}\eta_T'\right)\mathrm{d}\eta_T}-$$

$$-\frac{\nu}{U_e\mathscr{P}r}\frac{\displaystyle\int_0^1\frac{\lambda_F}{\lambda}\,\mathrm{d}(T_a^2)}{\displaystyle\int_0^1\eta_T\frac{\partial T_a}{\partial\eta_T}\left(\int_0^{\eta_T}\frac{U_a}{T_a}\,\mathrm{d}\eta_T'\right)\partial\eta_T}=0.$$

Apoi se găseşte formula pentru numărul Nusselt local care este o mărime de importanţă practică în problemele de convecţie, ce indică transferul

de căldură prin frontiere la sau de la fluidul în mișcare

$$\mathcal{N}u(\xi)=\frac{\mathcal{R}e_\xi \mathcal{P}r}{2\psi_{\delta_T}}\left\{\frac{\int_0^1 \frac{\partial T_a}{\partial \eta_T}\left(\int_0^{\eta_T}\frac{U_a}{T_a}\,d\eta'_T\right)d\eta_T}{\int_0^1 \eta_T\frac{\partial T_a}{\partial \eta_T}\left(\int_0^{\eta_T}\frac{U_a}{T_a}\,d\eta'_T\right)d\eta_T}\left[\left(2\frac{1}{\Delta_T}\frac{dT_w}{d\xi}\int_0^1\eta_T\frac{U_a}{T_a}\,d\eta_T+\right.\right.\right.$$

$$+\frac{1}{\Delta_T}\frac{d\Delta_T}{d\xi}\int_0^1\eta_T U_a\,d\eta_T-\frac{1}{U_e}\frac{dU_e}{d\xi}\int_0^1\eta_T T_a\left(\int_0^{\eta_T}\frac{U_a}{T_a}\,d\eta'_T\right)d\eta_T\Big)\psi_{\delta_T}^2-$$

$$-2\frac{U_e\nu}{C_p\Delta_T}\int_0^1\eta_T T_a\left(\frac{\partial U_a}{\partial\eta_T}\right)^2 d\eta_T+\frac{\nu}{U_e\mathcal{P}r}\int_0^1\frac{\lambda_f}{\lambda}\,d(T_a^2)\Big]-$$

$$-2\left[\frac{1}{\Delta_T}\frac{dT_w}{d\xi}\int_0^1\frac{U_a}{T_a}\,d\eta_T+\frac{1}{\Delta_T}\frac{d\Delta_T}{d\xi}\int_0^1 U_a\,d\eta_T-\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{1}{U_e}\frac{dU_e}{d\xi}\int_0^1 T_a\left(\int_0^{\eta_T}\frac{U_a}{T_a}\,d\eta'_T\right)d\eta_T\right]\psi_{\delta_T}^2+2\frac{U_e\nu}{C_p\Delta_T}\int_0^1\frac{1}{T_a}\left(\frac{\partial U_a}{\partial\eta_T}\right)^2 d\eta_T\right\}$$

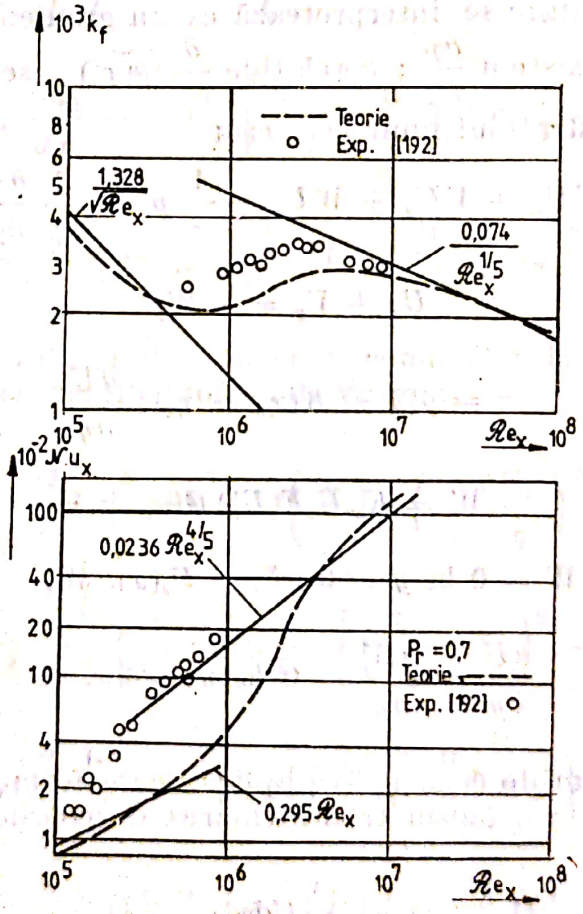


Fig. 5.4.1

Această formulă arată variația continuă a numărului Nusselt local de la curgerea laminară (K, $K_T \to 0$) pînă la curgerea turbulentă complet dezvoltată (K, K_T — valori foarte mari). În figura 5.4.1 este dată diagrama de variație a numărului Nusselt în funcție de $\mathcal{R}e_x$ [188].

Scanned with OKEN Scanner

§ 5.5. Efecte slabe tridimensionale în stratul limită bidimensional

Prin efecte slabe tridimensionale în stratul limită bidimensional vom înțelege modificările caracteristicilor stratului limită în direcția z (paralelă cu peretele și normală pe direcția principală U a curgerii) datorită vitezei laterale W date. Aceste efecte se concretizează prin formarea unor vîrtejuri longitudinale (cu axa în direcția curgerii) observate experimental și deduse și teoretic prin studii calitative de stabilitate [167], [7], [87].

Mișcarea considerată presupune satisfacerea următoarelor condiții: viteza laterală W, mică în comparație cu U_e, $(W/U_e \ll 1)$, expresia acestei viteze are forma generală:

$$W = K_w\, U_e \cdot F\left(\frac{U}{U_e}\right) \cdot G\left(\frac{x}{\delta_0}, \frac{z}{\delta_0}\right), \frac{W_{\max}}{U_e} = (10^{-2} \div 10^{-1})$$

termenul $W\dfrac{\partial U}{\partial z}$ din ecuațiile de mișcare și indirect termenul $\dfrac{\partial w}{\partial z}$ din ecuația de continuitate se interpretează ca un gradient de presiune care se adaugă celui existent $\dfrac{\partial p}{\partial x}$; corelațiile $\dfrac{\partial}{\partial z}(\widetilde{w'v'})$ se neglijează. Cu acestea, ecuațiile stratului limită se scriu

$$UU_x + VU_y + WU_z + \frac{1}{\rho} p_x = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau}{\partial y}$$

$$U_x + V_y = -W_z$$

$$\tau = \mu[1 + K(\eta_0 - \eta_2)]\frac{\partial U}{\partial y}$$

$$W = K_w U_e F(U_a)\, G(x_a, z_a)$$

cu condițiile $U = W = 0$ la $y = 0$; $U = U_e(x)$, $W_e = 0$,

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial W}{\partial y} = 0 \text{ la } y = \delta(x, z).$$

Acestui sistem de ecuații i se aplică acum formularea integro-diferențială. Ca de obicei, facem transformarea de coordonate

$$\xi = x,\ \zeta = z, \eta = \frac{\int_0^y U\,dy'}{\int_0^\delta U\,dy'} = \frac{\psi(x, y, z)}{\psi_\delta(x, z)},$$

a cărei inversă este $x = \xi$, $z = \zeta$, $y = \psi_\delta \int_0^\eta \frac{1}{U}\,d\eta'$.

Scanned with OKEN Scanner

Se introduc apoi termenii suplimentari sub forma

$$WU_z = WU_\zeta + WU_\eta r_z,$$

$$V = -(\eta\psi_\delta)_x - \left(\int_0^y W\mathrm{d}y\right)_x = -r_{1x}\psi_{\delta-\eta}\frac{\partial\psi_\delta}{\partial x} - \frac{\partial\psi_\delta}{\partial z}\int_0^\eta \frac{W}{U}\,\mathrm{d}\eta' -$$

$$- \psi_\delta \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\int_0^\eta \frac{W}{U}\,\mathrm{d}\eta'\right) - \psi_\delta r_z \frac{W}{U},$$

astfel că sistemul integro-diferențial, în care s-a folosit aproximația $U_a = U_a(\eta)$, se scrie

$$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial\tau}{\partial\eta} = \psi_\delta U_\xi + \psi_\delta \frac{W}{U} U_\zeta - \eta U_\eta \frac{\partial\psi_\delta}{\partial x} - \frac{\partial\psi_\delta}{\partial z} U_\eta \int_0^\eta \frac{W}{U}\,\mathrm{d}\eta' -$$

$$- \psi_\delta U_\eta \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\int_0^\eta \frac{W}{U}\,\mathrm{d}\eta'\right) - \frac{\psi_\delta}{U} U_e U_{e_x} \simeq \psi_\delta\left(U_a - \frac{1}{U_a}\right)U_{e_x} -$$

$$- \eta U_{a_\eta} U_e \frac{\partial\psi_\delta}{\partial x} - U_e U_{a_\eta}\left[\frac{\partial\psi_\delta}{\partial z}\int_0^\eta \frac{W}{U}\,\mathrm{d}\eta' + \psi_\delta \frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^\eta \frac{W}{U}\,\mathrm{d}\eta'\right]$$

$$\tau = \frac{\mu}{2\psi_\delta}\left[1 + K(r_0 - r_2)\right]\frac{\partial}{\partial\eta}(U^2); \quad \frac{W}{U} = k_w \frac{F(U_a)}{U_a} G(\xi_a, \zeta_a).$$

Integrarea dublă și introducerea condițiilor la limită conduce la următoarele expresii pentru profilul de viteze :

$$U_a^2 = \frac{\nu}{\nu_f}\left\{\left(\eta\frac{\partial U_a}{\partial\eta}\right)^\oplus + \int_0^\eta U_a^2 \mathrm{d}\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right) - \left(\eta\frac{\partial U_a}{\partial\eta}\right)^\oplus \int_0^1 U_a^2 \mathrm{d}\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right) +\right.$$

$$+ \frac{2\psi_\delta^2}{\nu}\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x}\frac{1}{U_e^2}\int_0^1 r_1\left(\frac{1}{U_a} - U_a\right)\mathrm{d}\eta\left[\left(\frac{1}{U_a} - U_a\right)^\oplus - \left(\eta\frac{\partial U_a}{\partial\eta}\right)^\oplus\right] +$$

$$+ \frac{1}{\nu U_e}\frac{\partial\psi_\delta^2}{\partial z}\int_0^1 r_1 U_{a_\eta}\left(\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,\mathrm{d}\eta'\right)\mathrm{d}\eta\left[\left(U_{a_\eta}\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,\mathrm{d}\eta'\right)^\oplus - \left(\eta\frac{\partial U_a}{\partial\eta}\right)^\oplus\right] +$$

$$+ \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e}\int_0^1 \eta\, U_{a_\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,\mathrm{d}\eta'\right)\mathrm{d}\eta\left[\left(U_{a_\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,\mathrm{d}\eta'\right)\right)^\oplus -\right.$$

$$\left.\left. - \left(\eta\frac{\partial U_a}{\partial\eta}\right)^\oplus\right]\right\} = U_{a_0}^2 +$$

$$+\frac{\nu}{\nu_f}\left\{\frac{1}{\nu U_e}\frac{\partial\psi_\delta^2}{\partial z}\int_0^1 \eta\, U_{a_\eta}\left(\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,d\eta'\right)d\eta\left[\left(U_{a_\eta}\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,d\eta'\right)^{\oplus}-\right.\right.$$

$$-\left.\left.\left(\eta\frac{\partial U_a}{\partial\eta}\right)^{\oplus}\right]+\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e}\int_0^1 \eta U_{a_\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,d\eta'\right)d\eta\left[\left(U_{a_\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,d\eta'\right)^{\ominus}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left(\eta\frac{\partial U_a}{\partial\eta}\right)^{\oplus}\right]\right\},$$

și pentru ecuația lui $\psi_\delta(x, z)$

$$\frac{\partial\psi_\delta^2}{\partial x}+\frac{\partial\psi_\delta^2}{\partial z}\frac{\int_0^1 \eta U_{a_\eta}\left(\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,d\eta'\right)d\eta}{\int_0^1 \eta^2 U_{a_\eta}\,d\eta}+$$

$$+\frac{2\psi_\delta^2}{U_e}\frac{dU_e}{dx}\frac{\int_0^1 \eta\left(\frac{1}{U_a}-U_a\right)d\eta}{\int_0^1 \eta^2 U_{a_\eta}\,d\eta}+$$

$$+2\psi_\delta^2\frac{1}{U_e}\frac{\int_0^1 \eta U_{a_\eta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,d\eta'\right)d\eta}{\int_0^1 \eta^2 U_{a_\eta}\,d\eta}-$$

$$-\nu U_e\frac{1-\int_0^1 U_a^2 d\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)}{\int_0^1 \eta^2 U_{a_\eta}\,d\eta}=0.$$

În figura 5.5.1 sînt trasate profilele pentru un strat limită Blasius perturbat tridimensional pentru o distribuție a vitezei laterale dată experimental [87] de forma $W=-W_0\left(\frac{\xi}{\delta_B}\right)\cos\frac{2\pi\zeta}{7\delta_B}\cdot F(U_a)$, unde $F(U_a)$ este trasat în figura 5.5.2 iar W_0 este valoarea maximă absolută. S-a admis $U_{a_B}^2=\eta(2-\eta)$ și

$$\psi_\delta^2\simeq\psi_{\delta_B}^2=\frac{1}{\int_0^1 \eta^2 dU_{a_B}}\nu U_e\,\xi,$$

Scanned with OKEN Scanner

adică soluția aproximativă Blasius. Expresia U_a^2 a vitezei se reduce astfel la următoarea formă

$$U_a^2 = U_{a_B}^2 + 2\,\frac{\int_0^1 \eta\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,\mathrm{d}\eta'\right)\mathrm{d}U_{a_B}}{\int_0^1 \eta^2\,\mathrm{d}U_{a_B}}\cdot\xi\left[\left(\frac{\partial U_{a_B}}{\partial\eta}\,\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\int_0^\eta \frac{W_a}{U_a}\,\mathrm{d}\eta'\right)\right)^{\oplus} - U_{a_B}^2\right]$$

cu care s-au calculat profilele din figura 5.5.2 [173].

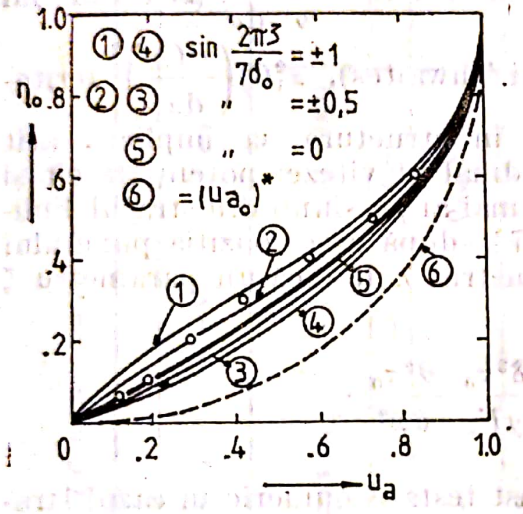


Fig. 5.5.1

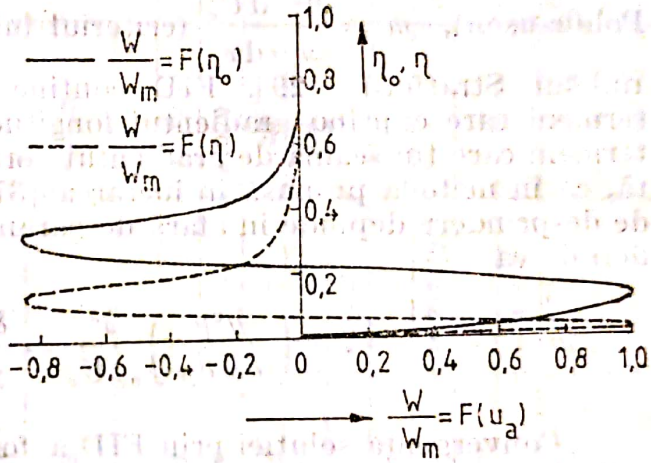


Fig. 5.5.2

§ 5.6. Comparație între rezultatele obținute prin FID și prin alte metode

În acest paragraf se prezintă caracteristici ale stratului limită obținute în cazuri particulare prin FID și prin alte metode pentru ilustrarea caracterului general de utilizare practică a acestei metode unitare. S-a ales pentru comparație stratul limită bidimensional incompresibil laminar și turbulent, pentru care există numeroase metode utilizate în practică precum și suficiente rezultate experimentale verificate. Comparația s-a efectuat în special pe criteriul determinării poziției punctului de desprindere care înglobează atît efecte globale cît și locale.

a) Pentru stratul limită laminar bidimensional metoda aproximativă, dedusă din FID, constă în utilizarea profilului inițial

$$U_a^{(0)} = \eta^{1/2}(2-\eta)^{1/2},$$

cu ajutorul căruia se găsesc caracteristicile ψ_δ^2, U_a^2, V_a, $\eta_0(\eta)$, $C_f\sqrt{\mathcal{R}e_x}$, $(\delta/x)\sqrt{\mathcal{R}e_x}$, determinate prin formulele din §§ 5.1 ; 5.2 ; 5.3.

Pentru punctul de desprindere se obține formula

$$\frac{1}{U_e}\frac{dU_e}{dx}\frac{\int_0^{x_d} U_e^3 dx}{U_e^3} = -0{,}2,$$

unde X_d este poziția punctului de desprindere.

În tabelul nr. 5.6.1 sînt date rezultatele comparative pentru X_d.

După cum se remarcă din tabelul nr. 5.6.1 FID răspunde destul de bine la aproape toate cazurile de desprindere laminară recomandate pentru verificarea unei metode.

Aceste metode pun în evidență cîte un parametru de care depinde poziția punctului de desprindere cum ar fi : $\lambda = \frac{\delta^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx}$ (criteriul lui Pohlhausen), $m = \frac{\theta^2}{\nu}\frac{dU_e}{dx}$ (criteriul lui Thwaites), $x_1^2 C_p\left(\frac{dC_p}{dx_1}\right)^2$ (criteriul lui Stratford) [29]. FID conține în structura sa implicit, atît termeni care cuprind gradientul longitudinal al vitezei potențiale cît și termeni care țin seama de gradientul normal al presiunii din stratul limită, ca în metoda propusă în lucrarea [37], după care poziția punctului de desprindere depinde în afară de parametrul λ de încă un parametru ζ definit ca

$$\zeta = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}\right)\frac{\delta^3}{\mu U_e} = -\frac{\delta^3 \tau_0}{\mu U_e}\frac{\partial^2 \tau_0}{\partial x^2}.$$

Convergența soluției prin FID a fost testată numeric în cazul stratului limită pe placa plană (Blasius), pentru care se scrie

$$U_a^2 = (\eta U_{a_\eta})^{\oplus} + \varepsilon\,[\eta - (\eta U_{a_\eta})^{\oplus}],$$

unde ε este proporțional cu tangenta profilului la marginea stratului limită.

Pentru $\varepsilon = 0$, adică $\left.\frac{dU_a}{d\eta}\right|_{\eta=1} = 0$, profilul inițial $U_a^{(0)} = \eta^m$ conduce prin iterații la aproximații ale caracteristicilor stratului limită care se apropie de soluția asimptotică Blasius.

Astfel, plecînd cu $m = 1/3$, la a cincea iterație se găsesc valorile $C_{f_{FID}} = 0{,}6/\sqrt{Re_x}$; $\delta_{FID} = 7\sqrt{\nu x/U_e}$; $|U_a^{(5)} - U_a^{(Bl)}| < 0{,}01$ pe întreg intervalul $[0,1]$.

Dacă însă se pleacă cu profilul inițial $U_a^{(0)} = \eta^{1/2}(2 - \eta)^{1/2}$ foarte apropiat de profilul Blasius, trebuie să se ia $\varepsilon \neq 0$ pentru a obține convergența procesului iterativ.

În privința stratului limită turbulent bidimensional incompresibil, cercetările cele mai recente [82] arată că modelul de ecuații Reynolds nu va putea reprezenta concret toate cazurile întîlnite oricît de perfecționate ar fi relațiile de închidere, fie sub formă algebrică, fie sub formă de ecuații diferențiale [19].

Aceasta atît din cauza neglijării unor termeni din ecuația completă în direcția curgerii și a omiterii în întregime a ecuației în direcția normală

Tabelul nr. 5.6.1

$U_e(x)$	X_a							
	Pohlhausen	Thwaites	Görtler	Svets	Jarre	Stratford Curle	FID	Obs.
$2U_\infty \sin \frac{x}{R}$	1,915 [217]	—	1,902 [192]	—	1,81 [80]	—	1,8	
$U_\infty(1-x/c)$	—	—	0,125 „	—	0,123 „	—	0,133	
$U_\infty\left[1-\left(\frac{x}{c}\right)^2\right]$	—	—	0,271 „	—	0,268 „	—	0,274	
$U_\infty[1-(x/c)^3]$	—	—	0,401 „	—	—	—	0,405	
$U_\infty\left[1-\left(\frac{x}{c}\right)^4\right]$	—	—	0,462 „	—	0,448 „	—	0,465	
$U_\infty[1-(x/c)^8]$	—	—	0,64 „	—	0,62 „	—	—	
$U_\infty[(1+x/c)^{-1}]$	—	—	0,159 „	—	0,158 „	—	0,177	
$U_\infty[1+(x/c)]^{-2}$	—	—	0,078 „	—	0,079 „	—	0,08	
$U_\infty[1-(x/c)]^{1/2}$	—	—	0,223 „	—	0,236 „	—	0,24	
$U_\infty[1-(x/c)]^2$	—	—	0,067 „	—	0,06 „	—	0,07	
Profil Joukovski	0,481 [217]	—	—	—	—	—	0,475	0,47 [192]
Cilindru Schubauer	—	—	—	—	—		2,2	2 [217]
Profile Chang	—	0,7037 [21]	—	0,777 [21]	—	0,8346[29]		$0,7\ \alpha=0$
Profil van Ingen	—	—	—		—	—	0,65	0,64 [217]
Profil Chang 20°	—	0,951 [21]	—	0,955 [21]	—	0,955 [29]	—	Exp. 0,93
45°	—	0,973 „		0,973 „	—	0,954 „	—	Exp.0,975
Profil Eppler	—	0,180 „	—	—	—	—	0,184	$\alpha=0$

Scanned with OKEN Scanner

curgerii, cît mai ales din cauza necunoașterii mecanismelor fundamentale ale turbulenței.

Aceasta fiind situația, FID permite determinarea unei relații de închidere simple (4.6.13), cu caracter unitar, și cu precizie, pe ansamblu cazurilor considerate, comparabilă cu celelalte metode.

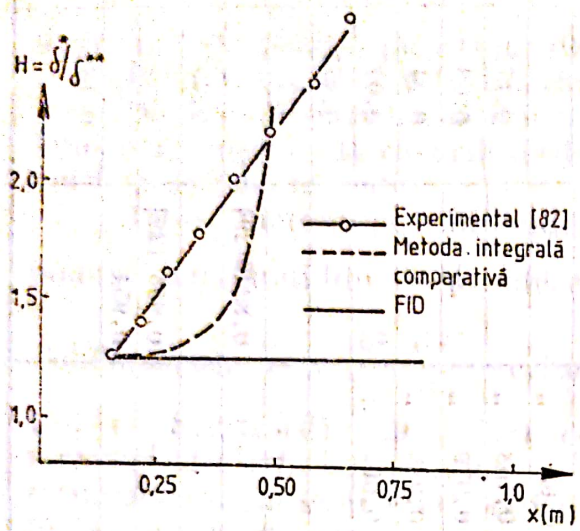


Fig 5.6.1

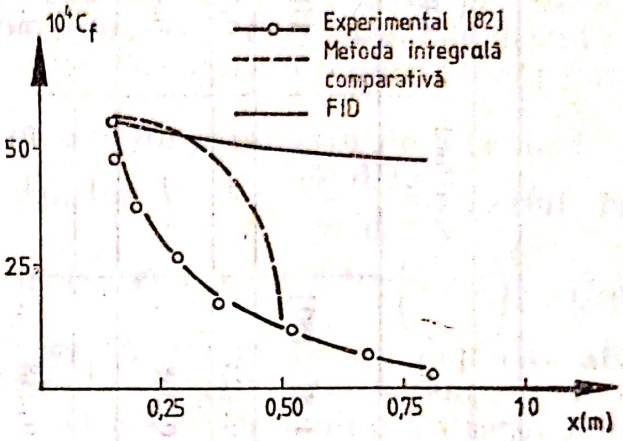


Fig. 5.6.2

Cu alte cuvinte, chiar dacă există metode potrivite să asigure rezultate corecte pentru anumite variații ale vitezei potențiale $U_e(A)$, în schimb în alte cazuri ele dau rezultate eronate.

În ceea ce privește programele de calcul numeric, destul de sofisticate și cu multe constante experimentale, deși lărgesc gama cazurilor tratate, [2], [19], [82], [164], [167] nu prezintă nici acestea o siguranță absolută, fiind bazate pe aceleași ecuații incomplete.

În această privință FID cu o relație simplă de închidere (5.1.5) deși are un grad de precizie redus, acoperă calitativ toate cazurile de curgeri cu gradient longitudinal.

Cu relația de închidere $\mu_t = \mu[1 + K(\eta_0 - \eta_2)]$; $K = 0{,}5\ \mathcal{R}e_\delta^{3/4}$ dedusă pe o bază teoretică (4.6.13), se pot integra ecuațiile (6.3.1) găsindu-se caracteristicile stratului limită turbulent.

Mărimea ψ_δ, care este cheia metodei, este dată de o formulă analitică (§5.3) ce necesită cuadraturi, plecîndu-se cu profilul inițial $U_a^{(0)}(\eta) = \eta \dfrac{H_0 - 1}{H_0 + 1}$, unde $H_0 = H(x = x_0)$.

Din multitudinea datelor experimentale și teoretice cu care am comparat rezultatele obținute cu FID, prezentăm în figurile 5.6.1 și 5.6.2 numai cazul curgerii măsurate de Fraser [82] și calculată cu o metodă integrală de tip Kármán și prin FID.

Scanned with OKEN Scanner

CAPITOLUL VI

APLICAȚII ALE FORMULĂRII INTEGRO-DIFERENȚIALE. EXEMPLE NUMERICE

§ 6.1. Considerații generale

În capitolele anterioare am văzut că ecuațiile de tipul $(DA_y)_y = \sum_{i=1}^{N} f_i$, supuse condițiilor la limită la $y = 0$ și $y = \delta$, admit o formulare integro-diferențială echivalentă care se obține prin introducerea transformării de coordonate $\xi = x$, $\eta = \int_0^y A\,dy' \Big/ \int_0^\delta A\,dy'$, $\zeta = z$, $\tau = t$, integrării duble după η între 1 și η și apoi între 0 și η și prin luarea în considerație a condițiilor la limită. Două sînt consecințele importante ale FID pentru aplicații : utilizarea unui profil de viteze $U_a^{(0)}(\eta)$ de primă aproximație care permite imediat deducerea caracteristicilor globale ale stratului limită, precum și deducerea unor expresii pentru corelațiile $\widetilde{u_i' u_j'}$, utilizate drept închidere pentru ecuațiile Reynolds.

Metoda integro-diferențială are un caracter *cuprinzător*, putîndu-se aplica unui mare număr de cazuri, majoritatea prezente ca termeni în $\sum_{i=1}^{N} f_i$ sau în D. De asemenea, ea este *unitară*, evitînd de fiecare dată introducerea unor variabile combinate (ca $y/\sqrt{x}$ etc.), dezvoltarea soluțiilor în serii adecvate cazului respectiv după parametri specifici cazului, alegerea unor profile de viteză particulare pentru cazul respectiv ca în metodele globale sau deosebirea dintre regimurile de curgere laminar și turbulent. Această particularitate a metodei provine din proprietățile de netezime ale transformării integrale și din proprietățile operatorului $(\cdot)^{\oplus}$; ea poate fi explicată, de asemenea, în următorul fel. În mecanică există posibilitatea unor formulări globale, ca de exemplu, a ecuației energiei $E(t_2) - E(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{V}(t')\,\vec{F}(t')\,dt'$ care furnizează soluții ale problemei în momentul t_2, cînd se cunoaște soluția la momentul t_1 iar integrala se poate efectua. Tot astfel, FID, bineînțeles mai complexă, furnizează soluții ale problemei U_a^2, C_f, δ, $\mathcal{N}u_x$, atunci cînd integralele de tipul $\int_0^1 G(U_a(\xi, \zeta, \eta))\,d\eta \sim$ $\sim \int_0^1 G(U_a^{(0)}(\eta))\,d\eta$ se pot efectua.

Avantajul generat de caracterul unitar al metodei compensează în mare măsură dezavantajul principal al metodei, adică caracterul aproximativ al rezultatelor numerice.

Tratarea unitară a diverselor tipuri de strat limită mai oferă avantajul unei priviri imediate în natura fenomenelor care apar în diferite cazuri, evitînd pericolul unor metode matematice exagerat de elaborate în raport cu semnificaţia fizică a particularităţii fenomenului şi uneori chiar primejdia ascunderii fenomenului în spatele complexităţii calculelor.

Tocmai datorită caracterului unitar al FID diversele cazuri care reprezintă capitole separate de mecanica stratului limită vor fi considerate aici ca simple efecte prezente în FID atît prin noi termeni în $\sum_{i=1}^{N} f_i$ cît şi ca noi „coeficienţi" de difuzie D.

Evidenţiem mai jos regulile generale de aplicare ale metodei integro-diferenţiale. 1) Găsirea unui sistem de coordonate fizice (q_1, q_2, q_3) în care curentul să aibă un profil de viteze $U_1(q_2)$ bine definit; 2) Scrierea ecuaţiei rezultate sub forma

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(D\frac{\partial U_1}{\partial q_2}\right)=\sum_{i=1}^{N} f_i(U_1, q_1, q_2, q_3);$$

3) Precizarea condiţiilor la limită generale $U_1 = U_{10}$, la $q_2 = 0$ şi $U_1 = U_{1e}$ $\frac{\partial U_1}{\partial q_2}=Q_2$, la $q_2 = \delta(q_1, q_3)$; 4) Efectuarea transformării de coordonate $\xi_1 = q_1, \eta_1 = \int_0^{q_2} U_1\,\mathrm{d}q_2' \Big/ \int_0^{\delta} U_1\,\mathrm{d}q_2$, $\xi_3 = q_3$ a cărei inversă este $q_1 = \xi_1$, $q_2 = \int_0^{\delta} U_1\,\mathrm{d}\eta_1 \cdot \int_0^{\eta} U_1^{-1}\,\mathrm{d}\eta_1'$, $q_3 = \xi_3$; 5) Obţinerea ecuaţiei lui $\psi_\delta = \int_0^{\delta} U_1 \mathrm{d}q_2$ sub forma

$$\int_0^1 D\,\mathrm{d}(U_1^2)+\sum_{i=1}^{N}\int_0^1 \eta f_{i_m}\,\mathrm{d}\eta-\frac{D_e}{D_0}\left|\frac{\partial}{\partial\eta}(U_1^2)\right|_e=0;$$

6) Obţinerea ecuaţiei lui U_1^2 sub forma

$$(6.1.1)\quad U_1^2=\frac{1}{D}\left\{D_e U_{1e}^2 f_{N_m}^{\oplus}+D_0 U_{10}^2(1-f_{N_m}^{\oplus})+\right.$$

$$+\frac{D_e}{D_0}\left|\frac{\partial}{\partial\eta}(U_1^2)\right|_e(\eta-f_{N_m}^{\oplus})+\int_0^1 U_1^2\,\mathrm{d}D\left[\frac{\int_0^{\eta} U_1^2\,\mathrm{d}D}{\int_0^1 U_1^2\,\mathrm{d}D}-f_{N_m}^{\oplus}\right]-$$

$$\left.-\sum_{i=1}^{N-1}\int_0^1 \eta f_i\,\mathrm{d}\eta[f_{i_m}^{\oplus}-f_{N_m}^{\oplus}]\right\},$$

unde f_{N_m} este ultimul dintre termenii sumei $\sum_{i=1}^{N} f_{i_m}$ puşi într-o ordine arbitrară şi ales astfel ca f_{N_m} să reprezinte curgerea de bază (la apreciere); 7) Obţinerea ecuaţiei contribuţiei anexe ca

$$\frac{\partial}{\partial\eta}(U_1^2)\Big|_0=\frac{1}{D_0}\sum_{1}^{N}\int_1^0 f_{i_m}\,\mathrm{d}\eta+\frac{D_e}{D_0}\left|\frac{\partial}{\partial\eta}(U_1^2)\right|_e.$$

Scanned with OKEN Scanner

Reguli de evaluare a unui efect :

a) Fie efectul prezent prin termenul f_{N-1} în ordonarea arbitrară a sumei $\sum_{i=1}^{N} f_i$ scrisă inițial. Vom avea în general

$$U^2_{1_N} = U^2_{1_{N-1}} - \frac{1}{D}\int_0^1 \eta f_{(N-2)_m}\,\mathrm{d}\eta\,[f^{\oplus}_{(N-2)_m} - f^{\oplus}_{N_m}],$$

unde $f_{(N-2)_m} = \dfrac{2\psi_\delta^2 f_{(N-2)}}{U_1}$, U_{1N} este U_1 din relația (6.1.1) datorită liniarității sistemului. Avem, de asemenea,

$$\left|\frac{\partial}{\partial\eta}(U_1^2)\right|_0 = \frac{D_e}{D_0}\left|\frac{\partial}{\partial\eta}(U_1^2)\right|_e + \frac{1}{D_0}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq N-1}}^{N}\int_1^0 f_{i_m}\,\mathrm{d}\eta + \frac{1}{D_0}\int_1^0 f_{(N-1)_m}\,\mathrm{d}\eta$$

și ecuația lui ψ_δ^2

$$\int_0^1 D\,\mathrm{d}(U_1^2) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq N-1}}^{N}\int_0^1 \eta f_{i_m}\,\mathrm{d}\eta + \int_0^1 \eta f_{(N-1)}\,\mathrm{d}\eta - \frac{D_e}{D_0}\left|\frac{\partial}{\partial\eta}(U_1^2)\right|_e = 0.$$

Dacă ecuația lui ψ_δ se poate rezolva pentru ψ_{δ_N}, atunci expresia efectului termenului f_{N-1} este arătată de diferența

$$\frac{1}{D}\int_0^1 \eta f_{(N-2)_m}\,\mathrm{d}\eta\,[f^{\oplus}_{(N-2)_m} - f^{\oplus}_{N_m}].$$

b) Pentru efecte care modifică pe D, ecuația (6.1.1) furnizează influența directă, bineînțeles după rezolvarea ecuației lui ψ_δ care conține pe D.

§ 6.2. Efecte tridimensionale în tratarea ecuațiilor stratului limită

Vom aplica regulile de evaluare a efectelor prin metoda integro-diferențială din §6.1, în primul rînd pentru tratarea problemelor de strat limită dezvoltat pe corpuri tridimensionale, caracterizate prin coordonatele de suprafață q_1, q_3 și q_2 după normala la suprafața corpului, cărora le corespund coeficienții lui Lamé H_1, H_3, H_2 și vitezele U, W, respectiv V.

Ecuațiile pentru mișcarea staționară, incompresibilă, cu aproximațiile standard ale stratului limită sînt

$$(6.2.1)\qquad \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial\tau_{12}}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_2}(\ln H_1^2 H_3)\,\tau_{12}\right] = \frac{H_2}{H_1}U\frac{\partial U}{\partial q_1} + V\frac{\partial U}{\partial q_2} +$$

$$+\frac{H_2}{H_3}W\frac{\partial U}{\partial q_3} + \frac{UV}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{H_2}{H_1 H_3}UW\frac{\partial H_1}{\partial q_3} -$$

$$-\frac{V^2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{H_2}{H_1 H_3}W^2\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{1}{\rho}\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial p}{\partial q_1} + F^{(1)},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial q_2} = U^2\frac{\partial}{\partial q_2}(\ln H_1) + W^2\frac{\partial}{\partial q_2}(\ln H_3) - F^{(2)},$$

$$\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial \tau_{32}}{\partial q_2} + \frac{\partial}{\partial q_2}(\ln H_1 H_3^2)\,\tau_{32}\right] = \frac{H_2}{H_1}U\frac{\partial W}{\partial q_1} + V\frac{\partial W}{\partial q_2} +$$

$$+\frac{H_2}{H_3}W\frac{\partial W}{\partial q_3} + \frac{H_2}{H_1 H_3}WU\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \frac{WU}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_2} -$$

$$-\frac{H_2}{H_1 H_3}U^2\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{V^2}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3} + \frac{1}{\rho}\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial p}{\partial q_3} + F^{(3)},$$

$$\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1 H_3 V) = -\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2 H_3 U) - \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1 H_2 W),$$

unde

$$\tau_{12} = \mu_f\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{U}{H_1}\right),$$

$$\tau_{32} = \mu_f\frac{H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{W}{H_3}\right),$$

$$\mu_f = \mu[1 + K(q_1, q_3)(\eta_0 - \eta_2)F(E_a)] \equiv \rho\cdot\nu_f,$$

$$E_a = \frac{\frac{\rho}{2}(U^2 + V^2 + W^2)}{\left\{\frac{\rho}{2}(U^2 + V^2 + W^2)\right\}_e} = \frac{E}{E_e},$$

$\mu = \rho\nu$, vîscozitate moleculară,

$\eta_0 = y/\delta$, $\delta(q_1, q_3)$ grosimea stratului limită,

$$\eta_2 = \int_0^y E\,dy' \Big/ \int_0^\delta E\,dy',$$

$K(q_1, q_3)$, un parametru ce ţine seamă de dezvoltarea stratului limită tridimensional,

$F(E_a)$, o funcţie de corecţie care ţine seama şi de curbura liniilor de curent.

Condiţiile la limită sînt

$$q_2 = q_{20}: \quad U = U_0, \quad V = V_0, \quad W = W_0$$

$$q_2 = \delta: \quad U = U_e, \quad W = W_e$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = Q_{U_e}, \quad \frac{\partial W}{\partial q_2} = Q_{W_e}$$

Primul punct important în aplicarea metodei îl constituie alegerea sistemului ortogonal q_1, q_2, q_3. Întrucît avem nevoie de profile de viteză $U(q_2)$, $W(q_2)$ asemănătoare celor din cazul bidimensional, vom alege un astfel de sistem local q_1, q_2, q_3, încît linia de curent a mișcării exterioare să fie bisectoarea unghiului drept format de q_1 și q_3 în fiecare punct (fig. 6.2.1).

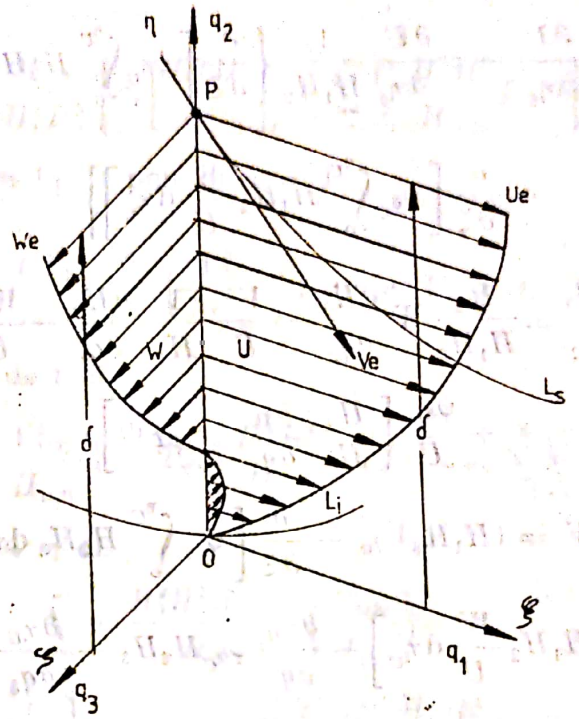


Fig. 6.2.1

Al doilea punct se referă la alegerea sistemului de coordonate care ridică următoarele probleme : fie se alege un sistem unic de tipul

$$\xi = q_1; \quad \eta_\varphi = \int_{q_{20}}^{q_2} \varphi(U, W)\, dq_2' \Big/ \int_{q_{20}}^{\delta} \varphi(U, W)\, dq_2'; \quad \zeta = q_3,$$

fie se alege un sistem pentru fiecare ecuație (U, W) :

$$\begin{matrix} \xi = q_1 \\ \zeta = q_3 \end{matrix} \qquad \eta_U = \frac{\int_{q_{20}}^{q_2} U\, dq_2'}{\int_{q_{20}}^{\delta} U\, dq_2'} = \frac{\psi_U}{\psi_{\delta_U}} \quad \text{pentru ecuația lui } U$$

$$\begin{matrix} \xi = q_1 \\ \zeta = q_3 \end{matrix} \qquad \eta_W = \frac{\int_{q_{20}}^{q_2} W\, dq_2'}{\int_{q_{20}}^{\delta} W\, dq_2'} = \frac{\psi_W}{\psi_{\delta_W}} \quad \text{pentru ecuația lui } W.$$

Este clar că metoda se poate aplica cu ambele modalități de transformare, avantajul de calcul fiind criteriul practic de alegere.

Scanned with OKEN Scanner

Pentru a fi consecvenţi, vom aplica fiecărei ecuaţii transformarea proprie, obţinînd succesiv (prin eliminarea lui V din ecuaţia de continuitate)

$$(6.2.2)\quad \frac{\partial \tau_{12}}{\partial \eta_U} + \tau_{12}\frac{\partial}{\partial \eta_U}[\ln H_1^2 H_3] = \rho\psi_{\delta_U}\left[\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{H_2}{H_3}\frac{W}{U}\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right] +$$

$$+ \rho V_0 \frac{\partial U}{\partial \eta_U} - \rho\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{1}{H_1 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\psi_{\delta_U}\int_0^{\eta_U} H_2 H_3\, d\eta'_U\right] +\right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\psi_{\delta_U}\int_0^{\eta_U} H_1 H_2 \frac{W}{U}\, d\eta'_U\right]\right\} +$$

$$+ \rho\psi_{\delta_U}\left\{\frac{V}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{H_2}{H_1 H_3}W\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{V^2}{U}\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{W^2}{U}\frac{H_2}{H_1 H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right\} +$$

$$+ \frac{\psi_{\delta_U}}{U}\left[\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial p}{\partial q_1} + \rho F^{(1)}\right],$$

$$H_1 H_3 V = (H_1 H_3 V)_0 - \frac{\partial}{\partial \xi}\left[\psi_{\delta_U}\int_0^{\eta_U} H_2 H_3\, d\eta'_U\right] -$$

$$- \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\psi_{\delta_U}\int_0^{\eta_U} H_1 H_2 \frac{W}{U}\, d\eta'_U\right] - \frac{\partial \tau_{1U}}{\partial q_1}\psi_{\delta_U} H_2 H_3 - \frac{\partial \tau_{1U}}{\partial q_3}\psi_{\delta_U} H_1 H_2 \frac{W}{U},$$

$$\frac{\partial \tau_{23}}{\partial \eta_W} + \tau_{23}\frac{\partial}{\partial \eta_W}[\ln H_1 H_3^2] =$$

$$= \rho\psi_{\delta_W}\left[\frac{H_2}{H_1}\frac{U}{W}\frac{\partial W}{\partial \xi} + \frac{H_2}{H_3}\frac{\partial W}{\partial \zeta}\right] + \rho V_0\frac{\partial W}{\partial \eta_W} -$$

$$- \rho\frac{\partial U}{\partial \eta_W}\frac{1}{H_1 H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\left[\psi_{\delta_W}\int_0^{\eta_W}\frac{U}{W} H_2 H_3\, d\eta'_W\right] + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\psi_{\delta_W}\int_0^{\eta_W} H_1 H_2\, d\eta_W\right]\right\} +$$

$$+ \rho\psi_{\delta_W}\left\{\frac{V}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_3} + \frac{H_2}{H_1 H_3}U\frac{\partial H_3}{\partial q_1} - \frac{U^2}{W}\frac{H_2}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} - \frac{V^2}{W}\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right\} +$$

$$+ \frac{\psi_{\delta_W}}{W}\left[\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial p}{\partial q_1} + \rho F^{(3)}\right],$$

cu condiţiile

$$\eta_U = \eta_W = 0: \quad U = U_0, \quad V = V_0, \quad W = W_0,$$

$$\eta_U = \eta_W = 1: \quad U = U_e, \quad W = W_e$$

$$\frac{\partial}{\partial \eta_U}(U^2) = 2\psi_{\delta_U} Q_{U_e}, \qquad \frac{\partial}{\partial \eta_W}(W^2) = 2\psi_{\delta_W} Q_{W_e}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Vom scrie prescurtat ecuaţiile de mai sus, astfel

$$\frac{\partial \tau}{\partial \eta} + \tau \frac{\partial}{\partial \eta}\left[\ln \frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}}\right] = \sum_{i=1}^{N} f_i,$$

care este o ecuaţie liniară în τ cu soluţia obţinută prin integrare după η de la 1 :

$$\tau = \frac{H_{1(3)}}{H_1^2 H_3^2}\left\{\tau_e\left[\frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}}\right]_e + \sum_{i=1}^{N}\int_1^{\eta} \frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}} f_i \, \mathrm{d}\eta\right\}$$

unde τ_e este valoarea lui τ pentru $\eta = 1$.

Cum

$$\tau = \frac{1}{2\psi_\delta}\mu_f \frac{H_{1(3)}^2}{H_2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{V_{1(3)}^2}{H_{1(3)}}\right), \text{ unde } V_1 = U,\ V_3 = W$$

se ajunge la ecuaţia de tipul

$$\mu_f \frac{H_1^2 H_3^2 H_{1(3)}}{H_2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{V_{1(3)}^2}{H_{1(3)}}\right) = 2\psi_\delta\left[\frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}}\right]_e \tau_e + 2\psi_\delta \sum_{i=1}^{N}\int_1^{\eta} \frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}} f_i \, \mathrm{d}\eta'.$$

Integrarea de la 0 la η dă

$$\int_0^{\eta} \mu_f \frac{H_1^2 H_3^2 H_{1(3)}}{H_2}\mathrm{d}\left(\frac{V_{1(3)}^2}{H_{1(3)}}\right) =$$

$$= 2\psi_\delta\left[\frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}}\right]_e \tau_e \eta + 2\psi_\delta \sum_{i=1}^{N}\int_0^{\eta}\left\{\int_1^{\eta'} \frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}} f_i \, \mathrm{d}\eta''\right\}\mathrm{d}\eta'$$

cu condiţia de la $\eta = 1$

(6.2.3)

$$\int_0^1 \mu_f \frac{H_1^2 H_3^2 H_{1(3)}}{H_2}\mathrm{d}\left(\frac{V_{1(3)}^2}{H_{1(3)}}\right) =$$

$$= 2\psi_\delta\left[\frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}}\right]_e \tau_e + 2\psi_\delta \sum_{i=1}^{N}\int_0^{1}\left\{\int_1^{\eta'} \frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}} f_i \, \mathrm{d}\eta''\right\}\mathrm{d}\eta'$$

astfel că, eliminînd, de exemplu, pe f_1, găsim

(6.2.4)

$$\int_0^{\eta} \mu_f \frac{H_1^2 H_3^2 H_{1(3)}}{H_2}\mathrm{d}\left(\frac{V_{1(3)}^2}{H_{1(3)}}\right) =$$

$$= \left[\frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}} f_1\right]^{\oplus} \int_0^1 \mu_f \frac{H_1^2 H_3^2 H_{1(3)}}{H_2}\mathrm{d}\left(\frac{V_{1(3)}^2}{H_{1(3)}}\right) +$$

$$+ 2\psi_\delta\left[\frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}}\right]_e \tau_e \left\{\eta - \left[\frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}} f_1\right]^{\oplus}\right\} -$$

$$- 2\psi_\delta \sum_{i=2}^{N}\int_0^1 \eta \frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}} f_i \, \mathrm{d}\eta \left\{\left[\frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}} f_i\right]^{\oplus} - \left[\frac{H_1^2 H_3^2}{H_{1(3)}} f_1\right]^{\oplus}\right\}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Ecuaţiile (6.2.3) şi (6.2.4) reprezintă fiecare cîte două ecuaţii şi formează FID a sistemului iniţial (6.2.1). Rezumînd, avem

$U^2(\xi, \eta, \zeta)$ este dat de ecuaţia (6.2.4) pentru $f_i = f_U$, indice (1),

$W^2(\xi, \eta, \zeta)$ este dat de ecuaţia (6.2.4) pentru $f_i = f_W$, indice (3),

$V(\xi, \eta, \zeta)$ este dat de ecuaţia (6.2.2) (a doua ecuaţie),

$\psi_{\delta_U}(\xi, \zeta)$ este dat de ecuaţia (6.2.3) pentru $f_i = f_U$, indice (1),

$\psi_{\delta_W}(\xi, \zeta)$ este dat de ecuaţia (6.2.3) pentru $f_i = f_W$, indice (3).

În aplicarea ecuaţiilor la cazuri concrete se poate porni de la expresii după prima aproximaţie

$$U_a^{(0)} = U^{(0)}/U_e(\tau_{U(W)}) \approx \eta_U^{m_U} \sim \eta_W^{m_W}$$

$$W_a^{(0)} = W^{(0)}/W_e(\eta_{W(U)}) \approx \eta_W^{n_W} \sim \eta_U^{n_U}$$

exponenţii m, n fiind legaţi prin relaţia

$$\delta = \frac{\psi_{\delta_U}}{U_e}\int_0^1 U_a^{-1}\,\mathrm{d}\tau_U = \frac{\psi_{\delta_W}}{W_e}\int_0^1 W_a^{-1}\,\mathrm{d}\eta_W.$$

O caracteristică importantă a stratului limită tridimensional o constituie existenţa liniilor de curent limită, dată de ecuaţia

$$\left|\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\eta=0} = \frac{U_0}{W_0}$$

care reprezintă tangenta locală a vectorului de suflaj (U_0, V_0) la perete. Dacă $U_0 = W_0 = 0$ avem de căutat

$$\left|\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\zeta}\right|_{\eta=0} = \lim\left|\frac{U}{W}\right|_{\eta\to 0}.$$

Avem, în general, lîngă perete,

$$U = U_0 + \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial U}{\partial q_2}\right)_0 H_2\,(q_2 - q_{20}) \approx$$

$$\approx U_0 + \left[\frac{\tau_{12}}{\mu} + \frac{U_0}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}(\ln H_1)\right]_0 H_2(q_2 - q_{20}),$$

$$W = W_0 + \left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial W}{\partial q_2}\right)_0 H_2(q_2 - q_{20}) + \ldots \approx W_0 +$$

$$+ \left[\frac{\tau_{23}}{\mu} + \frac{W_0}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}(\ln H_3)\right]_0 H_2(q_2 - q_{20}),$$

Scanned with OKEN Scanner

astfel că pentru $U_0 = W_0 = 0$ găsim

$$\left|\frac{d\xi}{d\zeta}\right|_{\eta=0} = \lim\left[\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}\right]_{\eta\to 0}.$$

Pentru $U_0 \neq W_0 \neq 0$ putem impune, de exemplu, condiția ca

$$\lim\left[\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}\right]_{\eta\to 0} = \frac{U_0}{W_0}$$

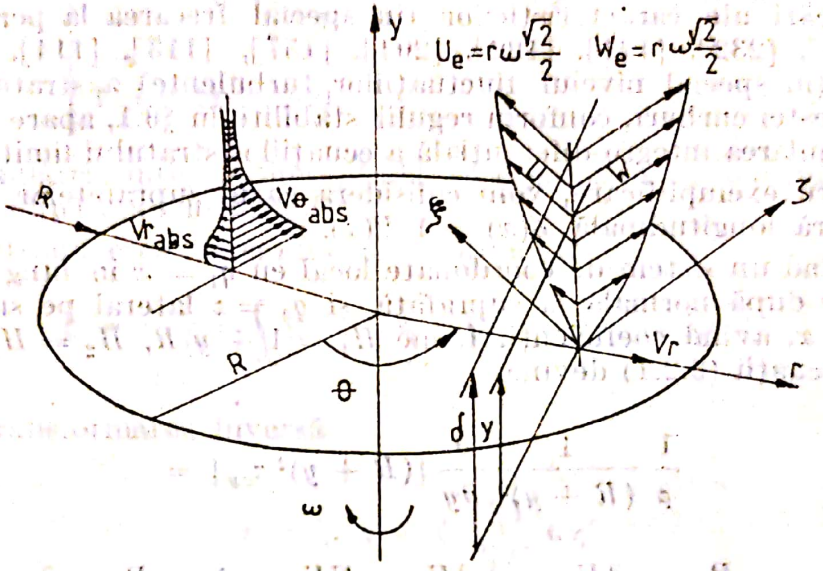


Fig. 6.2.2

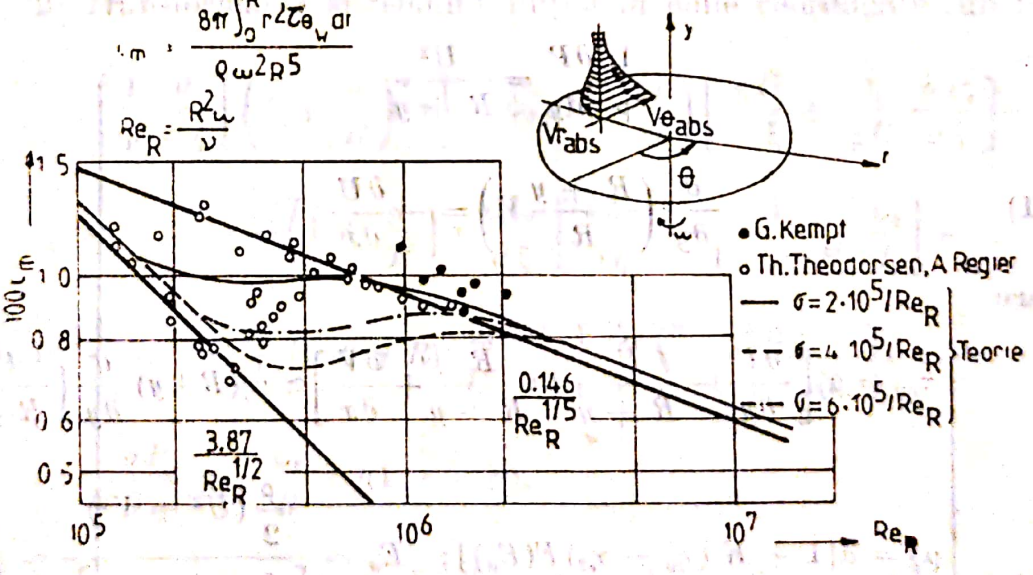


Fig. 6.2.3

care dă o relație $f(U_0, W_0) = 0$ deoarece τ_{12} și τ_{23} conțin în expresia lor pe U_0 și W_0.

Exemple de calcul de strat limită tridimensional cu ajutorul FID sînt date în lucrările [168], [185] pentru cazul laminar perturbat.

În figurile 6.2.2 și 6.2.3 sînt arătate rezultate din stratul limită tranzițional pe un disc în rotație [119], [189].

Scanned with OKEN Scanner

§ 6.3. Efectul curburii asupra caracteristicilor stratului limită

Există multe aplicaţii tehnice în care stratul limită se dezvoltă pe suprafeţe curbe, ca de exemplu paletele turbomaşinilor, aripi, prize de presiune, butuc de elice, ajutaje etc. În calculele obişnuite de strat limită asemenea curburi mici au fost neglijate, utilizîndu-se modelul stratului limită pe placa plană. Totuşi, chiar la curburi mici, se constată experimental modificări ale caracteristicilor (în special frecarea la perete) [209], [66], [196], [232], [121], [122], [204], [157], [113], [114], [20] şi de structură (în special nivelul fluctuaţiilor turbulente) a stratului limită. Efectul acestei curburi, conform regulii stabilite în §6.1, apare ca termeni noi în formularea integro-diferenţială a ecuaţiilor stratului limită.

Pentru exemplificare, vom considera cazul suprafeţelor avînd numai curbură longitudinală $\mathscr{C}(x) = 1/R(x)$.

Alegînd un sistem de coordonate local cu $q_1 = x$ în lungul suprafeţei, $q_2 = y$ după normala la suprafaţă şi $q_3 = z$ lateral pe suprafaţă şi normal pe x, avînd coeficienţii Lamé $H_1 = 1 + y/R$, $H_2 = H_3 = 1$, sistemul de ecuaţii (6.2.1) devine

$$\frac{1}{\rho}\frac{1}{(R+y)^2}\frac{\partial}{\partial y}[(R+y)^2\tau_{xy}] =$$

$$= \frac{R}{R+y}U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{UV}{R+y} + \frac{1}{\rho}\frac{R}{R+y}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{U^2}{R+y}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{R+y}{R}V\right) = -\frac{\partial U}{\partial x} \tag{6.3.1}$$

în care

$$\begin{cases} \tau_{xy} = \mu_f\left[\dfrac{\partial U}{\partial y} - \dfrac{U}{R+y} + \dfrac{R}{R+y} + \dfrac{\partial V}{\partial x}\right] \simeq \mu_f(R+y)\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{U}{R+y}\right) \\ \mu_f = \mu[1 + K(\eta_0 - \eta_2)F(E_a)]; \quad E_a = \dfrac{\dfrac{\rho}{2}(U^2+V^2)}{\left[\dfrac{\rho}{2}(U^2+V^2)\right]_e} = \dfrac{E}{E_e}, \\ F = (1-F_c)^2(1-3{,}2\,F_c)^3 \simeq (1-11{,}6\,F_c), \\ F_c = \dfrac{U/R}{\partial U/\partial y}. \end{cases} \tag{6.3.2}$$

fiind o funcție de corecție care ține seama de curbura liniilor de curent. $R(x)$ și $U_e(x)$ sînt date astfel încît să îndeplinească condițiile curgerii exterioare [78].

Condițiile la limită corespunzătoare sînt

$$(6.3.3)\qquad \begin{cases} U = V = 0,\ P = P_w(x) \text{ la } y = 0 \\ U = U_e(x),\ \dfrac{\partial U}{\partial y} \simeq 0,\ P = P_e(x) \text{ la } y = \delta(x) \\ \delta = 0 \text{ la } x = 0. \end{cases}$$

Formularea integro-diferențială corespunzătoare acestui sistem se desfășoară după etapele stabilite :

1) Introducerea sistemului de coordonate

$$\xi = x,\ \eta = \int_0^y U\,dy' \Big/ \int_0^\delta U dy' = \psi(x, y)/\psi_\delta(x)$$

care are transformarea inversă

$$x = \xi,\ y = \psi_\delta \int_0^\eta \frac{1}{U}\,d\eta'.$$

2) Transformarea sistemului inițial în noile coordonate sub forma

$$(6.3.4)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left[\left(1+\dfrac{y}{R}\right)^2 \tau\right] = \psi_\delta\left(1+\dfrac{y}{R}\right)\left[\dfrac{\partial U}{\partial \xi} + \dfrac{1}{\rho U}\dfrac{\partial P_e}{\partial \xi}\right] - \\ \qquad -\left(1+\dfrac{y}{R}\right)\eta\dfrac{d\psi_\delta}{d\xi}\left[\dfrac{\partial U}{\partial \eta} + \dfrac{1}{1+y/R}\dfrac{\psi_\delta}{R}\right] + \\ \qquad + (1+y/R)\dfrac{\psi_\delta}{U}\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left[\dfrac{\psi_\delta}{R}\int_1^\eta \dfrac{U d\eta'}{1+y/R}\right], \\ \dfrac{\partial P}{\partial \eta} = \rho\dfrac{\psi_\delta}{R}\,U/(1+y/R), \\ V = -\dfrac{1}{1+y/R}\left[\eta\dfrac{d\psi_\delta}{d\xi} - U\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\psi_\delta\int_0^\eta \dfrac{1}{U}\,d\eta'\right)\right], \end{cases}$$

în care

$$\frac{y}{R} = \frac{\psi_\delta}{R}\int_0^\eta \frac{d\eta'}{U};$$

3) Transformarea condițiilor la limită în noile coordonate

$$(6.3.5)\qquad \begin{cases} U = V = 0,\ P = P_w(\xi) \text{ la } \eta = 0, \\ U = U_e(\xi),\ \dfrac{\partial U}{\partial \eta} \simeq 0,\ P = P_e(\xi) \text{ la } \eta = 1, \\ \psi_\delta = 0 \text{ la } \xi = 0; \end{cases}$$

4) Integrarea în raport cu η între 1 și η

$$\tau = \frac{\rho}{(1 + y/R)^2}\int_1^\eta \left(1 + \frac{y}{R}\right)\left[\frac{\partial U}{\partial \xi}\psi_\delta + \frac{\psi_\delta}{\rho U}\frac{dP_e}{d\xi} - \eta'\frac{\partial U}{\partial \eta'}\frac{d\psi_\delta}{d\xi} - \right.$$

$$\left. - \frac{\eta'}{1 + y/R}\frac{\psi_\delta}{R}\frac{d\psi_\delta}{d\xi} + \frac{\psi_\delta}{U}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\psi_\delta}{R}\int_1^{\eta'}\frac{U}{1 + y/R}d\eta''\right)\right]d\eta' - \frac{\mu U_e}{R}\frac{1 + \delta/R}{(1 + y/R)^2},$$

$$P = P_e + \rho\frac{\psi_\delta}{R}\int_1^\eta \frac{U}{1 + y/R}d\eta';\quad \delta/R = \frac{\psi_\delta}{R}\int_0^1 U^{-1}d\eta.$$

Pentru $\eta = 0$ obținem formulele pentru frecarea la perete și diferența transversală de presiune datorită curburii

$$\tau_w = \rho\int_0^1 \left(1 + \frac{y}{R}\right)\left[\left(\eta\frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\eta}{1 + y/R}\frac{\psi_\delta}{R}\right)\frac{d\psi_\delta}{d\xi} - \psi_\delta\frac{\partial U}{\partial \xi} - \frac{\psi_\delta}{\rho U}\frac{dP_e}{d\xi} - \right.$$

$$\left. - \frac{\psi_\delta}{\rho U}\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\rho\frac{\psi_\delta}{R}\int_1^\eta \frac{U}{1 + y/R}d\eta'\right)\right]d\eta - \frac{\mu U_e}{R}(1 + \delta/R)$$

$$P_w - P_e = -\rho\psi_\delta/R\int_0^1 \frac{U}{1 + y/R}d\eta;$$

5) Integrarea în raport cu η între 0 și η și introducerea condiției la $\eta = 1$ conduce la relațiile

$$U_a^2 = \left(\frac{\nu}{\nu_f}\right)(\eta U_{a_\eta})^\oplus +$$

$$+\left(\frac{\nu}{\nu_f}\right)\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\frac{dU_e}{d\xi}\int_0^1 \eta\left(\frac{1}{U_a} - U_a\right)\left[\left(\frac{1}{U_a} - U_a\right)^\oplus - (\eta U_{a_\eta})^\oplus\right] +$$

$$+\left(\frac{\nu}{\nu_f}\right)\int_0^1 U_a^2 d\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)\left[\frac{\int_0^\eta U_a^2 d\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)}{\int_0^1 U_a^2 d\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)} - (\eta U_{a_\eta})^\oplus\right] +$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\frac{\psi_\delta}{RU_e}\left(\frac{\nu}{\nu_f}\right)\left\{\frac{1}{\nu U_e}\frac{d\psi_\delta^2}{d\xi}\int_0^1 \eta_i^2 U_{a_\eta}\left(\int_0^\eta \frac{d\eta'}{U_a}\right)d\eta_i\left[\left(\eta_i U_{a_\eta}\int_0^\eta \frac{d\eta'}{U_a}\right)^\oplus - \eta_i U_{a_{\eta_i}})^\oplus\right]+\right.$$

$$+\frac{1}{3\nu U_e}\frac{d\psi_\delta^2}{d\xi}[(\eta)^\oplus - (\eta U_{a_\eta})^\oplus] - \frac{1}{\nu U_e}\frac{d\psi_\delta^2}{d\xi}\int_0^1 \frac{\eta}{U_a}\frac{1+y/R}{1+\delta/R}d\eta_i \times$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{U_a}\frac{1+y/R}{1+\delta/R)}\right)^\oplus - (\eta_i U_{a_\eta})^\oplus\right]+\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\frac{dU_e}{d\xi}\int_0^1 \eta_i\left(\frac{1}{U_a}-U_a\right)\left(\int_0^\eta \frac{d\eta'}{U_a}\right)d\eta \times$$

$$\times\left[\left(\left(\frac{1}{U_a}-U_a\right)\int_0^\eta \frac{d\eta'}{U_a}\right)^\oplus - (\eta U_{a_\eta})^\oplus\right]-$$

$$-\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^3}\int_0^1 \frac{\eta}{U_a}\left(\int_0^\eta \frac{d\eta'}{U_a}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\psi_\delta U_e}{R}\int_1^\eta \frac{U_a d\eta'}{1+y/R)}\right)d\eta_i \times$$

$$\times\left[\left(\frac{1}{U_a}\left(\int_0^\eta \frac{d\eta'}{U_a}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\psi_\delta U_e}{R}\int_1^\eta \frac{U_a d\eta'}{1+y/R}\right)\right)^\oplus - (\eta_i U_{a_\eta})^\oplus\right]-$$

$$-\frac{2\psi_\delta R}{\nu U_e^2}\int_0^1 \frac{\eta}{U_a}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\psi_\delta U_e}{R}\int_1^\eta \frac{U_a d\eta'}{1+y/R)}\right)d\eta\left[\left(\frac{1}{U_a}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\psi_\delta U_e}{R}\int_0^\eta \frac{U_a d\eta_i'}{1+y/R}\right)\right)^\oplus -\right.$$

$$\left.-(\eta_i U_{a_\eta})^\oplus\right]+4\int_0^1 \frac{\nu_f}{\nu}\left(1+\frac{y}{R}\right)U_a d\eta_i\left[\frac{\int_0^\eta \frac{\nu_f}{\nu}\left(1+\frac{y}{R}\right)U_a d\eta'}{\int_0^1 \frac{\nu_f}{\nu}\left(1+\frac{y}{R}\right)U_a\, d\eta_i} - (\eta_i U_{a_\eta})^\oplus\right]+$$

$$+\int_0^1\left(\int_0^\eta \frac{d\eta'}{U_a}\right)\left(2+\frac{y}{R}\right)U_a^2 d\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)\left[\frac{\int_0^\eta\left(\int_0^{\eta'}\frac{d\eta''}{U_a}\right)\left(2+\frac{y}{R}\right)U_a^2 d\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)}{\int_0^1\left(\int_0^\eta \frac{d\eta'}{U_a}\right)\left(2+\frac{y}{R}\right)U_a^2 d\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)} - (\eta_i U_{a_\eta})^\oplus\right]-$$

$$-2\left(1+\frac{\delta}{R}\right)[\eta - (\eta U_{a_\eta})^\oplus] -$$

$$\left.-\left(2+\frac{\delta}{R}\right)\int_0^1 \frac{d\eta}{U_a}\left[\frac{\frac{\nu_f}{\nu}\left(2+\frac{y}{R}\right)U_a^2\int_0^\eta \frac{d\eta'}{U_a}}{(2+\delta/R)\int_0^1 \frac{d\eta}{U_a}} - (\eta U_{a_\eta})^\oplus\right]\right\} =$$

$$= U_{a_0}^2 + 2A\,U_{a_R},$$

Scanned with OKEN Scanner

$$\frac{\mathrm{d}\psi_\delta^2}{\mathrm{d}\xi}+2\frac{\int_0^1\eta\left(\frac{1}{U_a}-U_a\right)\mathrm{d}\eta+\frac{\psi_\delta}{RU_e}\int_0^1\eta\left(\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta'}{U_a}\right)\left(\frac{1}{U_a}-U_a\right)\mathrm{d}\eta}{\int_0^1\eta^2U_{a_\eta}\mathrm{d}\eta+\frac{\psi_\delta}{RU_e}\left[\int_0^1\left(\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta'}{U_a}\right)\eta^2U_{a_\eta}\mathrm{d}\eta+\frac{1}{3}-\int_0^1\frac{\eta}{U_a}\frac{1+y/R}{1+\delta/R}\mathrm{d}\eta\right]}\times$$

$$\times\frac{1}{U_e}\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}\xi}\psi_\delta^2-\nu U_e\cdot$$

$$\cdot\frac{1-\int_0^1U_a^2\mathrm{d}\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)}{\int_0^1\eta^2U_{a_\eta}\mathrm{d}\eta+\frac{\psi_\delta}{RU_e}\left[\int_0^1\left(\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta'}{U_a}\right)\eta^2U_{a_\eta}\mathrm{d}\eta+\frac{1}{3}-\int_0^1\frac{\eta}{U_a}\frac{1+y/R}{1+\delta/R}\mathrm{d}\eta\right]}-$$

$$\left[\frac{2\psi_\delta^2}{U_e^2}\int_0^1\frac{\eta}{U_a}\left(\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta'}{U_a}\right)\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\psi_\delta U_e}{R}\int_0^\eta\frac{U_a\mathrm{d}\eta'}{1+y/R}\right)\mathrm{d}\eta+\right.$$

$$\left.+\frac{2\psi_\delta R}{U_e}\int_0^1\frac{\eta}{U_a}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\psi_\delta U_e}{R}\int_0^\eta\frac{U_a\mathrm{d}\eta'}{1+y/R}\right)\mathrm{d}\eta\right]-$$

$$-\frac{\psi_\delta}{RU_e}\cdot\frac{}{\int_0^1\eta^2U_{a_\eta}\mathrm{d}\eta+\frac{\psi_\delta}{RU_e}\left[\int_0^1\left(\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta'}{U_a}\right)\eta^2U_{a_\eta}\mathrm{d}\eta+\frac{1}{3}-\int_0^1\frac{\eta}{U_a}\frac{1+y/R}{1+\delta/R}\mathrm{d}\eta\right]}$$

$$\left[-4\nu U_e\int_0^1\frac{\nu_f}{\nu}(1+y/R)U_a\mathrm{d}\eta-\nu U_e\int_0^1\left(\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta'}{U_a}\right)\left(2+\frac{y}{R}\right)U_a^2\mathrm{d}\left(\frac{\nu_f}{\nu}\right)+\right.$$

$$\left.+2\nu U_e\left(1+\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{U_a}\right)+\frac{\nu U_e\delta}{R}\left(2+\int_0^1\frac{\mathrm{d}\eta}{U_a}\right)\right]$$

$$-\frac{\psi_\delta}{RU_e}\cdot\frac{}{\int_0^1\eta^2U_{a_\eta}\mathrm{d}\eta+\frac{\psi_\delta}{RU_e}\left[\int_0^1\left(\int_0^\eta\frac{\mathrm{d}\eta'}{U_a}\right)\eta^2U_{a_\eta}\mathrm{d}\eta+\frac{1}{3}-\int_0^1\frac{\eta}{U_a}\frac{1+y/R}{1+\delta/R}\mathrm{d}\eta\right]}=0,$$

sau, mai compact,

$$\frac{\mathrm{d}\psi_\delta^2}{\mathrm{d}\xi}+2\frac{\int_0^1\eta\left(\frac{1}{U_a}-U_a\right)\mathrm{d}\eta+2A\cdot f_R}{\int_0^1\eta^2U_{a_\eta}\mathrm{d}\eta+2Ah_R}\frac{1}{U_e}\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}\xi}\psi_\delta^2-$$

$$-\nu U_e\frac{1-\int_0^1U_a^2\mathrm{d}(\nu_f/\nu)}{\int_0^1\eta^2U_{a_\eta}\mathrm{d}\eta+2A\cdot h_R}-\frac{2A\cdot g_R}{\int_0^1\eta^2U_{a_\eta}\mathrm{d}\eta+2A\cdot h_R}=0$$

în care A este un parametru de curbură, definit prin relaţia $2A=\delta/R$; iar U_{a_R}, f_R, g_R şi h_R sînt expresii care conţin termenii introduşi de curbură. Cu ajutorul formulelor obţinute s-a determinat efectul curburii asupra principalelor caracteristici ale stratului limită : grosime, frecarea la perete şi diferenţa transversală de presiune, atît în regim laminar, cît şi în regim turbulent, pentru o viteză potenţială exterioară de forma $U_e=\frac{U_\infty}{1+2A}$ şi pentru valori mici ale parametrului de curbură $A\leqslant 0{,}05$, presupus

constant [182], [34]. Rezultatul cel mai interesant îl constituie faptul că frecarea la perete este puternic influențată chiar de curburi mici, în sensul că pe suprafețe convexe frecarea se micșorează, constatare ce ar putea fi exploatată din punct de vedere tehnic pentru reducerea rezistenței la înaintare (fig. 6.3.1).

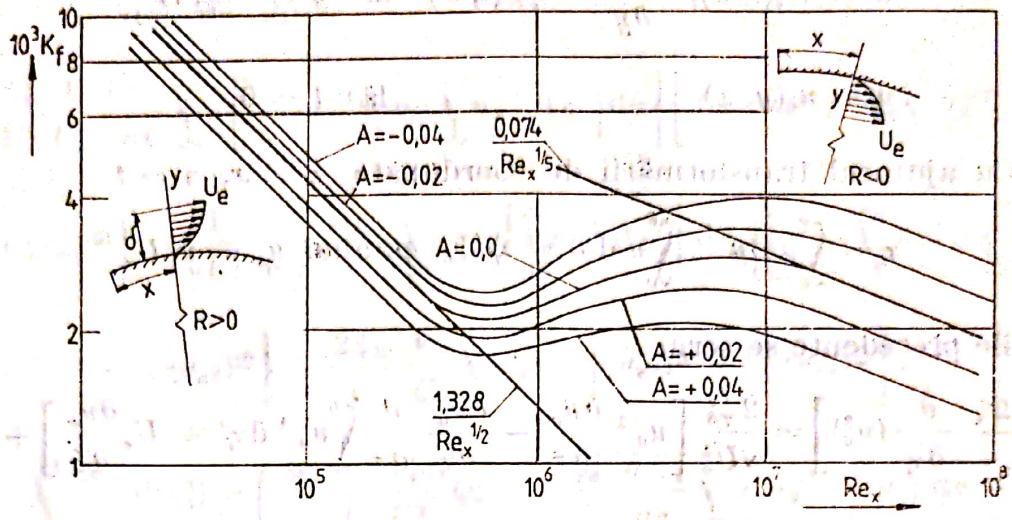


Fig 6.3.1

§ 6.4. Efecte nestaționare în ecuațiile stratului limită

Efectele de nestaționaritate, prezente prin termenul $\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}$ în ecuațiile Navier-Stokes, se regăsesc în ecuațiile stratului limită prin acest termen și se pot prinde în calcul în două moduri : ori ca efect de nestaționaritate al condițiilor la limită $U_e = U_e(t)$, $p_w = p_w(t)$, $U_0 = U_0(t)$, ori ca efect de nestaționaritate al structurii interioare a curgerii (perturbații ale vitezei, presiunii, ca în studiile de stabilitate, dar mai ales variații în timp ale coeficientului de difuzie $\mathscr{D}$) [174].

Vom avea pentru stratul limită incompresibil bidimensional nestaționar

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\mathscr{D}_u \frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial U_e}{\partial t} - U_e\frac{\partial U_e}{\partial x}$$

$$v = v_0 - \frac{\partial}{\partial x}\int_0^y u\,dy$$

$$\mathscr{D}_u = \nu[1 + \mathscr{K}(\mathscr{R}_{\psi_\delta})(\eta_0 - \eta_2)]$$

$$\mathscr{K}/K \approx \frac{\{u'v'\}_t}{\{u'v'\}_x}\,\frac{\tilde{h}\dfrac{\partial U}{\partial y}}{h\dfrac{\partial u}{\partial y}} \sim \frac{u'v'}{\widetilde{u'v'}} \quad \text{(fig. 4.7.1)}$$

$$h = \eta_0 - \eta_2\,;\quad \mathscr{R}e_{\psi_\delta} = \frac{1}{\nu}\int_0^\delta u\,dy$$

Scanned with OKEN Scanner

cu condiţiile la limită şi iniţiale

$$u = U_0(t, x), \quad v = V_0(t, x) \qquad \text{la} \quad y = 0$$

$$u = U_e(t, x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q_e(t, x) \quad \text{la} \quad y = \delta(x, t)$$

$$u = u_0(y, x) \qquad \text{la} \quad t = 0.$$

Cu ajutorul transformării de coordonate $\xi = x$, $\tau = t$

$$\eta = \int_0^y u\,dy' \Big/ \int_0^\delta u\,dy' = \psi/\psi_\delta, \text{ punînd } u_a = u/U_e$$

ecuaţiile precedente se scriu

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}\frac{\partial}{\partial \eta}(u_a^2)\right] = \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\left[u_a^{-1}\frac{\partial u_a}{\partial \tau} - \frac{\partial u_a}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\eta u_a^{-1}\,d\eta' + U_e\frac{\partial u_a}{\partial \xi}\right] +$$

$$+ \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\left[1 - u_a^{-1} + \frac{\partial u_a}{\partial \eta}\int_0^\eta u_a^{-1}d\eta'\right]\frac{1}{U_e}\frac{\partial U_e}{\partial t} +$$

$$+ \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}(u_a - u_a^{-1})\frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{2\psi_\delta}{\nu}\frac{V_0}{U_e}\frac{\partial u_a}{\partial \eta} -$$

$$- \frac{1}{\nu U_e}\frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_\delta^2)\,\eta_i\frac{\partial u_a}{\partial \eta} - \frac{1}{\nu U_e^2}\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi_\delta^2)\frac{\partial u_a}{\partial \eta}\int_0^\eta u_a^{-1}\,d\eta'$$

cu condiţiile la limită

$$u = U_0(\tau, \xi), v = V_0(\tau, \xi) \qquad \text{la} \quad \eta = 0$$

$$u = U_e(\tau, \xi), \frac{\partial}{\partial \eta}(u_a^2) = \frac{2\psi_\delta}{U_e^2}Q_e \quad \text{la} \quad \eta = 1$$

$$u = u_0(\xi, \eta) \qquad \text{la} \quad \tau = 0.$$

Se obţine succesiv $\left(\text{neglijînd primii termeni } \frac{\partial u_a}{\partial \tau},\ \frac{\partial u_a}{\xi}\right)$

$$\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}\frac{\partial}{\partial \eta}(u_a^2) = \left(\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}\right)_e\frac{2\psi_\delta}{U_e^2}Q_e + \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\frac{\partial U_e}{\partial x}\int_1^\eta (u_a - u_a^{-1})d\eta' -$$

$$- \frac{1}{\nu U_e}\frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_\delta^2)\int_1^\eta \eta\frac{\partial u_a}{\partial \eta}\,d\eta' + \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\frac{1}{U_e}\frac{\partial U_e}{\partial t}\int_1^\eta\left[1 - u_a^{-1} + \frac{\partial u_a}{\partial \eta}\int_0^\eta u_a^{-1}\,d\eta'\right] -$$

$$- \frac{1}{\nu U_e^2}\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi_\delta^2)\int_1^\eta \frac{\partial u_a}{\partial \eta'}\left[\int_0^{\eta'} u_a^{-1}\,d\eta''\right]d\eta' + \frac{2\psi_\delta}{\nu}\frac{V_0}{U_e}(u_a - 1)$$

cu condițiile la limită și inițiale

$$u = U_0(t, x), \quad v = V_0(t, x) \qquad \text{la} \quad y = 0$$

$$u = U_e(t, x), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = Q_e(t, x) \qquad \text{la} \quad y = \delta(x, t)$$

$$u = u_0(y, x) \qquad \text{la} \quad t = 0.$$

Cu ajutorul transformării de coordonate $\xi = x$, $\tau = t$

$$\eta = \int_0^y u\,dy' \Big/ \int_0^\delta u\,dy' = \psi/\psi_\delta, \text{ punînd } u_a = u/U_e$$

ecuațiile precedente se scriu

$$\frac{\partial}{\partial \eta}\left[\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}\frac{\partial}{\partial \eta}(u_a^2)\right] = \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\left[u_a^{-1}\frac{\partial u_a}{\partial \tau} - \frac{\partial u_a}{\partial \eta}\frac{\partial}{\partial \tau}\int_0^\eta u_a^{-1}\,d\eta' + U_e\frac{\partial u_a}{\partial \xi}\right] +$$

$$+\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\left[1 - u_a^{-1} + \frac{\partial u_a}{\partial \eta}\int_0^\eta u_a^{-1}d\eta'\right]\frac{1}{U_e}\frac{\partial U_e}{\partial t} +$$

$$+\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}(u_a - u_a^{-1})\frac{\partial U_e}{\partial x} + \frac{2\psi_\delta}{\nu}\frac{V_0}{U_e}\frac{\partial u_a}{\partial \eta} -$$

$$-\frac{1}{\nu U_e}\frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_\delta^2)\,\eta\frac{\partial u_a}{\partial \eta} - \frac{1}{\nu U_e^2}\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi_\delta^2)\frac{\partial u_a}{\partial \eta}\int_0^\eta u_a^{-1}\,d\eta'$$

cu condițiile la limită

$$u = U_0(\tau, \xi), \; v = V_0(\tau, \xi) \qquad \text{la} \quad \eta = 0$$

$$u = U_e(\tau, \xi), \; \frac{\partial}{\partial \eta}(u_a^2) = \frac{2\psi_\delta}{U_e^2}Q_e \qquad \text{la} \quad \eta = 1$$

$$u = u_0(\xi, \eta) \qquad \text{la} \quad \tau = 0.$$

Se obține succesiv $\left(\text{neglijînd primii termeni } \frac{\partial u_a}{\partial \tau}, \; \frac{\partial u_a}{\xi}\right)$

$$\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}\frac{\partial}{\partial \eta}(u_a^2) = \left(\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}\right)_e\frac{2\psi_\delta}{U_e^2}Q_e + \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\frac{\partial U_e}{\partial x}\int_1^\eta (u_a - u_a^{-1})d\eta' -$$

$$-\frac{1}{\nu U_e}\frac{\partial}{\partial \xi}(\psi_\delta^2)\int_1^\eta \eta\frac{\partial u_a}{\partial \eta}d\eta' + \frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\frac{1}{U_e}\frac{\partial U_e}{\partial t}\int_1^\eta\left[1 - u_a^{-1} + \frac{\partial u_a}{\partial \eta}\int_0^\eta u_a^{-1}\,d\eta'\right] -$$

$$-\frac{1}{\nu U_e^2}\frac{\partial}{\partial \tau}(\psi_\delta^2)\int_1^\eta \frac{\partial u_a}{\partial \eta'}\left[\int_0^{\eta'} u_a^{-1}\,d\eta''\right]d\eta' + \frac{2\psi_\delta}{\nu}\frac{V_0}{U_e}(u_a - 1)$$

$$\int_0^{\eta}\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}\frac{\partial(u_a^2)}{\partial\eta'}\,d\eta' = \left(\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}\right)_e\frac{2\psi_\delta}{U_e^2}Q_e\{\eta-(\eta u_{a\eta})^{\oplus}\}+(\eta u_{a\eta})^{\oplus}\int_0^1\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}\frac{\partial}{\partial\eta'}(u_a^2)d\eta'+$$

$$+\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\frac{\partial U_e}{\partial x}\int_0^1\eta(u_a^{-1}-u_a)\,d\eta\,\{(u_a^{-1}-u_a)^{\oplus}-(\eta u_{a\eta})^{\oplus}\}-$$

$$-\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\frac{1}{U_e}\frac{\partial U_e}{\partial t}\int_0^1\eta\left[1-u_a^{-1}+u_{a\eta}\int_0^{\eta}u_a^{-1}\,d\eta'\right]d\eta\left\{\left[1-u_a^{-1}+u_{a\eta}\int_0^{\eta}u_a^{-1}d\eta'\right]^{\oplus}-\right.$$

$$\left.-(\eta u_{a\eta})^{\oplus}\right\}+\frac{1}{\nu U_e^2}\frac{\partial}{\partial\tau}(\psi_\delta^2)\cdot\int_0^1\eta u_{a\eta}\left[\int_0^{\eta}u_a^{-1}\,d\eta'\right]d\eta\left\{\left[\eta u_{a\eta}\int_0^{\eta}u_a^{-1}d\eta'\right]^{\oplus}-\right.$$

$$\left.-(\eta u_{a\eta})^{\oplus}\right\}+\frac{2\psi_\delta}{\nu}\frac{V_0}{U_e}\int_0^1 u_a\,d\eta\left\{(u_{a\eta})^{\oplus}-(\eta u_{a\eta})^{\ominus}\right\}.$$

$$\int_0^1\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}d(u_a^2)=\left(\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}\right)_e\frac{2\psi_\delta}{U_e^2}Q_e+\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\frac{\partial U_e}{\partial x}\int_0^1\eta(u_a^{-1}-u_a)\,d\eta+$$

$$+\frac{1}{\nu U_e}\frac{\partial}{\partial\xi}(\psi_\delta^2)\int_0^1\eta^2u_{a\eta}\,d\eta-\frac{2\psi_\delta^2}{\nu U_e^2}\frac{1}{U_e}\frac{\partial U_e}{\partial t}\int_0^1\eta\left[1-u_a^{-1}+u_{a\eta}\int_0^{\eta}u_a^{-1}\,d\eta'\right]d\eta+$$

$$+\frac{2\psi_\delta}{\nu}\frac{V_0}{U_e}\int_0^1(u_a-1)\,d\eta+\frac{1}{\nu U_e^2}\frac{\partial(\psi_\delta^2)}{\partial\tau}\int_0^1\eta u_{a\eta}\cdot\left[\int_0^{\eta}u_a^{-1}d\eta'\right]d\eta.$$

Ecuaţiile de mai sus reprezintă FID a sistemului original ; în această formulare mărimea $\psi_\delta(\xi,\tau)$ satisface o ecuaţie cu derivate parţiale de forma

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(\psi_\delta^2)+AU_e^{-1}\frac{\partial}{\partial\tau}(\psi_\delta^2)+\left[BU_e^{-1}\frac{\partial U_e}{\partial x}+CU_e^{-2}\frac{\partial U_e}{\partial t}\right]\psi_\delta^2+$$

$$+C_1V_0\psi_\delta+\nu U_e D(\psi_\delta)=0$$

în care A, B, C, C_1, D au următoarele expresii

$$A=\frac{\int_0^1\eta u_{a\eta}\left[\int_0^{\eta}u_a^{-1}\,d\eta'\right]d\eta}{\int_0^1\eta^2u_{a\eta}\,d\eta};\quad B=2\frac{\int_0^1\eta(u_a^{-1}-u_a)d\eta}{\int_0^1\eta^2u_{a\eta}\,d\eta};\quad C_1=2\frac{\int_0^1(u_a-1)\,d\eta}{\int_0^1\eta^2u_{a\eta}\,d\eta};$$

$$C=-2\frac{\int_0^1\eta\left[1-u_a^{-1}+u_{a\eta}\int_0^{\eta}u_a^{-1}\,d\eta'\right]d\eta}{\int_0^1\eta^2u_{a\eta}\,d\eta};\quad D=\frac{\left(\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}\right)_e\frac{2\psi_\delta}{U_e^2}Q_e-\int_0^1\frac{\mathscr{D}_u}{\nu}d(u_a^2)}{\int_0^1\eta^2u_{a\eta}\,d\eta}$$

Scanned with OKEN Scanner

și se pot evalua într-o primă aproximație punînd $u_a^{(0)} \approx u_a^{(0)}(\tau_i)$. Întrucît soluția generală a acestei ecuații nu are importanță practică, se vor prezenta următoarele cazuri particulare :

a) *Soluție similară.* Se admite că $\psi_\delta = \psi_\delta(\zeta)$, unde $\zeta = \alpha\xi - \beta\tau$. Se obține ecuația

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\zeta}(\psi_\delta^2) + U_e^{-1}\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}\zeta}\frac{\alpha B - \beta U_e^{-1}C}{\alpha - \beta A U_e^{-1}}\psi_\delta^2 - \frac{\nu^{1-p}U_e k_0}{\alpha - \beta A U_e^{-1}} D\psi_\delta^p = 0$$

unde $\mathscr{D}_u/\nu = Kh$, $K = k_0\,\mathscr{R}e_{\psi\delta}^p$. Pentru U_e constant se găsește

$$\psi_\delta^{2-p} = \frac{2-p}{2}\frac{\nu^{1-p}U_e D k_0}{\alpha - \beta A U_e^{-1}}(\zeta - \zeta_0) + \psi_{\delta_0}^{2-p}$$

unde $\psi_\delta|_{\zeta=0} = \psi_{\delta 0}$. Se observă că pentru $\beta = 0$, $\alpha = 1$ se găsește soluția pentru placa plană.

b) *Soluție periodică.* Se admite că

$$AU_e^{-1} = u(\xi)\frac{1}{2R}\sin\tau,$$

$$BU_e^{-1}\frac{\partial U_e}{\partial\xi} + CU_e^{-2}\frac{\partial U_e}{\partial\tau} = u(\xi)\frac{2}{R}\cos\tau,$$

$$C_1 V_0\psi_\delta + \nu U_e D = -k,$$

unde R este o constantă și $u(\xi)$ este o funcție de clasă C^1 Se obține

$$\psi_\delta^2(\xi,\tau) = 2^4 k\int_{\xi_0}^{\xi}\frac{\exp\left\{2R^{-1}\int_\xi^s u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right\}}{\left[(1+\cos\tau)+(1-\cos\tau)\exp\left\{R^{-1}\int_\xi^s u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\right\}\right]^4}\mathrm{d}s$$

cu $\psi_\delta^2(\xi_0,\tau) = 0$. Această soluție este fizic plauzibilă cînd $V_0(\xi,\tau)$ este astfel realizat încît să satisfacă ultima condiție de mai sus.

c) *Soluție sumă* — conform §4.7. Se scrie ecuația lui ψ_δ sub forma

$$-1\frac{\partial}{\partial\tau}(\psi_\delta^2) + \nu u_e\frac{\int_0^1 u_a^2\,\mathrm{d}h\left(T^{-1}\int_0^T\mathscr{K}\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}\eta}{\int_0^1\eta^2 u_{a\eta}\,\mathrm{d}\eta} +$$

$$+ (BU_e^{-1}U_{e\xi} + cU_e^{-2}U_{e\tau})\psi_\delta^2 = -\frac{\partial}{\partial\xi}(\psi_\delta^2) + \frac{\nu U_e}{\int_0^1\eta^2 u_{a\eta}\,\mathrm{d}\eta}$$

unde s-a luat $V_0 = 0$ și s-a pus $|\mathscr{K}| = T^{-1}\int_0^t\mathscr{K}\,\mathrm{d}t$.

Scanned with OKEN Scanner

Se remarcă analogia cu ecuaţia lui Kirchoff pentru un circuit RLC serie

$$L\frac{dI}{dt}+C^{-1}\int_0^t I\,dt' + RI = E(t),$$

unde: $I(t)$ este curentul electric, C, capacitatea, R, rezistenţa ohmică, L, inductanţa şi $E(t)$, sursa de alimentare [174].

§ 6.5. Efecte de compresibilitate în stratul limită

Studiul în incompresibil a pus în evidenţă două caracteristici globale esenţiale ale stratului limită (frecarea la perete şi grosimea stratului limită), precum şi unele aspecte legate de structura curgerii (cîmpul corelaţiilor de viteze).

Acestea se păstrează şi în compresibil, dar modificate de creşterea vitezei, în sensul că micşorarea densităţii cu creşterea numărului lui Mach este însoţită de creşterea grosimii şi de reducerea coeficientului de frecare. Compresibilitatea dă naştere la o a treia caracteristică importantă şi anume modificările în starea termică a fluidului (neglijabile la viteze mici) devin sensibile. Astfel, stratul limită în fluid compresibil este caracterizat prin existenţa simultană a difuziei de impuls şi de entalpie, transferul de impuls dînd naştere la frecare, iar cel de entalpie la un flux de căldură la perete. Prin aceasta stratul limită joacă un rol important în fenomenul de încălzire aerodinamică a corpurilor cu viteze mari [116], [89], [153].

În ceea ce priveşte structura curgerilor compresibile, cîmpul fluctuaţiilor, redus numai la corelaţiile de viteze în incompresibil, se complică extraordinar datorită corelaţiilor viteză-temperatură ($\overline{\vec{V}'T'}$), viteză-presiune ($\overline{\vec{V}'p'}$), viteză-densitate ($\overline{\vec{V}'\rho'}$), care transportă convectiv mărimile respective, ca şi datorită corelaţiilor presiune-temperatură ($\overline{p'T'}$), presiune-densitate ($\overline{p'\rho'}$), densitate-temperatură ($\overline{\rho'T'}$), care modifică echilibrul energetic al stratului de frecare.

Pentru a vedea ansamblul corelaţiilor ce intervin în curgerile compresibile, vom face o descompunere de tip Reynolds:

$$\vec{\mathscr{V}} = \vec{V} + \vec{v}' = (U + u')\,\vec{\imath} + (V + v')\,\vec{j} + (W + w')\,\vec{k},$$

$$\mathscr{P} = P + p',$$

$$\mathrm{P} = \rho + \rho'$$

$$\mathscr{T} = T + T',$$

Cu aceste mărimi fizice se pot construi formal corelaţii duble şi triple, dar cele importante sînt cele care apar în ecuaţiile Reynolds pentru curgeri

Scanned with OKEN Scanner

compresibile și ecuația energiei în funcție de temperatura fluidului. Astfel, avem

$$(\overline{\rho' u'})_t + (\rho U)_t + (\rho UU)_x + (\rho UV)_y + (\rho UW)_z + P_x =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\mu\left(2U_x - \frac{2}{3}\nabla\vec{V}\right) - \rho\overline{u'u'} - 2\overline{\rho' u'}U - \overline{\rho' u'u'}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}[\mu(U_y + V_x) - \rho\overline{u'v'} - \overline{\rho' u'}V - \overline{\rho' v'}U - \overline{\rho' u'v'}] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}[\mu(W_x + U_z) - \rho\overline{u'w'} - \overline{\rho' u'}W - \overline{\rho' w'}U - \overline{\rho' u'w'}],$$

$$(\overline{\rho' v'})_t + (\rho V)_t + (\rho VU)_x + (\rho VV)_y + (\rho VW)_z + P_y =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[\mu(U_y + V_x) - \rho\overline{v'u'} - \overline{\rho' v'}U - \overline{\rho' u'}V - \rho'\overline{u'v'}] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}\left[\mu\left(2V_y - \frac{2}{3}\nabla\vec{V}\right) - \rho\overline{v'v'} - 2\overline{\rho' v'}V - \overline{\rho' v'v'}\right] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}[\mu(V_z + W_y) - \rho\overline{v'w'} - \overline{\rho' v'}W - \overline{\rho' w'}V - \overline{\rho' v'w'}],$$

$$(\rho' w')_t + (\rho W)_t + (\rho WU)_x + (\rho WV)_y + (\rho WW)_z + P_z =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}[\mu(W_x + U_z) - \rho\overline{w'u'} - \overline{\rho' w'}U - \overline{\rho' u'}W - \overline{\rho' w'u'}] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}[\mu(V_z + W_y) - \rho\overline{w'v'} - \overline{\rho' w'}V - \overline{\rho' v'}W - \overline{\rho' v'w'}] +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left[\mu\left(2W_z - \frac{2}{3}\nabla\vec{V}\right) - \rho\overline{w'w'} - 2\overline{\rho' w'}W - \overline{\rho' w'w'}\right],$$

(6.5.1)

(6.5.2) $$\rho_t + (\rho U)_x + (\rho V)_y + (\rho W)_z + (\overline{\rho' u'})_x + (\overline{\rho' v'})_y + (\overline{\rho' w'})_z = 0,$$

$$(\rho' T')_t + (\rho T)_t + (\rho UT)_x + (\rho VT)_y + (\rho WT)_z - \frac{1}{C_p}P_t -$$

$$- \frac{1}{C_p}(\vec{V}\nabla)P - \frac{1}{C_p}(\overline{\vec{v}'\nabla})\overline{p'} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\lambda}{C_p}T_x - \rho\overline{u'T'} - \overline{\rho' u'}T - \overline{\rho' T'}U - \overline{\rho' u'T'}\right] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\lambda}{C_p}T_y-\rho\overline{v'T'}-\overline{\rho'v'T}-\overline{\rho'T'V}-\overline{\rho'v'T'}\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\lambda}{C_p}T_z-\rho\overline{w'T'}-\overline{\rho'w'T}-\overline{\rho'T'W}-\overline{\rho'w'T'}\right]+$$

$$+\frac{\mu}{C_p}[2(U_x^2+V_y^2+W_z^2)+(V_x+U_y)^2+(W_y+V_z)^2+$$

$$(6.5.3)\quad +(U_z+W_x)^2-\frac{2}{3}(U_x+V_y+W_z)^2+2(\overline{u'_xu'_x}+\overline{v'_yv'_y}+\overline{w'_zw'_z})+$$

$$+\overline{v'_xv'_x}+\overline{u'_y\cdot u'_y}+2\overline{v'_xu'_y}+\overline{w'_yw'_y}+\overline{v'_zv'_z}+2\overline{w'_yv'_z}+\overline{u'_z\cdot u'_z}+$$

$$+\overline{w'_xw'_x}+2\overline{u'_zw'_x}-\frac{2}{3}(\overline{u'_xu'_x}+\overline{v'_yv'_y}+\overline{w'_zw'_z}+2\overline{u'_xv'_y}+$$

$$+2\overline{u'_xw'_z}+2\overline{v'_yw'_z})\Big].$$

În același mod ecuația de stare a unui gaz ideal $\mathscr{P}=R\rho\mathscr{T}$ permite stabilirea unor relații între fluctuațiile mărimilor respective de forma

$$P=R(T\rho+\overline{T'\rho'}),$$

$$(6.5.4)\qquad \frac{p'}{p}\simeq\left(\frac{T'}{T}+\frac{\rho'}{\rho}\right)\Big/\left(1+\frac{\overline{T'\rho'}}{T\rho}\right).$$

Sistemul de ecuații (6.5.1)—(6.5.4) în care am introdus fluctuațiile de viteză, presiune, densitate și temperatură, arată clar caracterul complex al corelațiilor acestor fluctuații și efectul lor asupra ecuațiilor respective.

Ecuațiile (6.5.1) pun în evidență ușor corelațiile care afectează termenii de vîscozitate, formînd un tensor mult mai complicat decît cel din incompresibil

$$\mathscr{T}_c=$$

$$=\begin{pmatrix}\rho\overline{u'^2}+2U\rho'\overline{u'}+\overline{\rho'u'u'} & \rho\overline{u'v'}+U\overline{\rho'v'}+V\overline{\rho'u'}+\overline{\rho'u'v'} & \rho\overline{u'w'}+U\overline{\rho'w'}+W\overline{\rho'u'}+\overline{\rho'u'w'}\\ \rho\overline{u'v'}+U\overline{\rho'v'}+V\overline{\rho'u'}+\overline{\rho'u'v'} & \rho\overline{v'^2}+2V\overline{\rho'v'}+\overline{\rho'v'v'} & \rho\overline{v'w'}+V\overline{\rho'w'}+W\overline{\rho'v'}+\overline{\rho'v'w'}\\ \rho\overline{u'w'}+U\overline{\rho'u'}W\overline{\rho'u'}+\overline{\rho'u'w'} & \rho\overline{v'w'}+V\overline{\rho'w'}+W\overline{\rho'v'}+\overline{\rho'v'w'} & \rho\overline{w'^2}+2W\overline{\rho'w'}+\overline{\rho'w'w'}\end{pmatrix}$$

Ca și în incompresibil, se pot transforma ecuațiile lui Reynolds în ecuații de tip Navier-Stokes cu coeficienți de vîscozitate μ_t și conducție

Scanned with OKEN Scanner

λ_f care includ efectul fluctuațiilor și care depind într-un anumit mod de mărimile medii ale cîmpului. Anume, vom pune, de exemplu,

$$\mu(U_y + V_x) - \rho\overline{u'v'}\left[1 + \frac{U}{\rho} + \frac{\overline{\rho'v'}}{\overline{u'v'}} + \frac{V}{\rho}\frac{\overline{\rho'u'}}{\overline{u'v'}} + \frac{1}{\rho}\frac{\overline{\rho'u'v'}}{\overline{u'v'}}\right] \simeq \mu_f(U_y + V_x),$$

$$\frac{\lambda}{C_p}T_y - \rho\overline{v'T'}\left[1 + \frac{V}{\rho}\frac{\overline{\rho'T'}}{\overline{v'T'}} + \frac{T}{\rho}\frac{\overline{\rho'v'}}{\overline{v'T'}} + \frac{1}{\rho}\frac{\overline{\rho'v'T'}}{\overline{v'T'}}\right] \simeq \frac{1}{C_p}\lambda_f T_y.$$

Formularea integro-diferențială a ecuației energiei pentru curgerile cu frecare, după cum s-a arătat în capitolul IV, a permis deducerea teoretică a unor expresii, pentru aceste mărimi, de forma

(6.5.5)

$$\mu_f^{ij} = \mu[1 + K^{ij}(E_a^* - E_a)^{\alpha_{ij}} \cdot (\eta_0 - \eta_2)^{\beta_{ij}} \cdot E_a^{\gamma_{ij}}],$$

$$\lambda_f^i = \lambda[1 + K_T^i(E_{a_T}^* - E_{a_T})^{\alpha_{T_i}} \cdot (E_a^* - E_a)^{\alpha'_{T_i}} \times$$

$$\times (\eta_{0_T} - \eta_{2T})^{\beta_{T_i}} (\eta_0 - \eta_2)^{\beta'_{T_i}} \cdot E_{a_T}^{\gamma_{T_i}} E_a^{\gamma'_{T_i}}],$$

unde

$$\eta_0 = y/\delta\,;\ \eta_{0T} = y/\delta_T\,;$$

δ = grosimea stratului limită dinamic;

δ_T = grosimea stratului limită termic;

$$\eta_2 = \int_0^y \rho(U^2 + V^2 + W^2)\,dy' \Big/ \int_0^\delta \rho(U^2 + V^2 + W^2)\,dy',$$

$$\eta_{2T} = \int_0^{\eta_{0T}} E_{a_T}\,d\eta'_{0_T} \Big/ \int_0^1 E_{a_T}\,d\eta_{0_T}\,;$$

$$E_a = \frac{\rho/2\,(U^2 + V^2 + W^2)}{\rho_e/2(U_e^2 + V_e^2 + W_e^2)} \simeq \rho_a U_a^2\,;\ E_a^* = E_a(\eta_2)$$

$$E_{a_T} = \frac{E_T - E_{T_W}}{E_{T_e} - E_{T_W}}\,;\ E_T = C_p T + \frac{1}{2}(U^2 + V^2 + W^2),$$

$$E_{T_W} = E_T|_{y=0}\,;\ E_{T_e} = E_T|_{y=\delta_T}\,;\ E_{a_T}^* = E_{a_T}(\eta_{2_T})$$

$\alpha_{ij}, \beta_{ij}, \gamma_{ij}, \alpha'_{Ti}, \beta'_{Ti}, \gamma'_{Ti}$ = parametri.

Această dependență a vîscozității, datorită fluctuațiilor μ_f^{ij} și a transferului de căldură corespunzător λ_f^i, de mărimile cuprinse în formu-

lele (6.5.5) face posibilă determinarea distribuției lor într-o secțiune a unui strat de frecare aturci cînd se cunoaște profilul de viteză U_a și profilul de temperatură T_a. Valoarea fizică a acestora depinde însă de coeficienții K^U și K_T^t care nu au aceeași stabilitate statistică, ca în cazul interacțiunii moleculare cînd devin nuli. Găsirea unor expresii pentru acești coeficienți se bazează pe determinarea experimentală a cîmpului corelațiilor și prelucrarea lor corespunzătoare, după cum s-a făcut în incompresibil.

Aceasta necesită însă prelucrarea a numeroase date experimentale, care pentru curgerile compresibile apar rar în literatura de specialitate. Extinderea la compresibil a relațiilor găsite pentru curgerile incompresibile nu este directă datorită complexității corelațiilor arătată mai înainte. Totuși, cu anumite corecții de număr Mach, expresiile din incompresibil ar putea fi utilizate pentru calculul stratului limită compresibil.

Vom prezenta ca exemplu de calcul al stratului limită compresibil cazul plăcii plane izolate termic (adiabatice), cazul $\mathscr{P}r = 1$.

Această problemă constă din ecuația de mișcare

$$\rho U U_x + \rho V U_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu_f \frac{\partial U}{\partial y}\right),$$

ecuația de continuitate

$$(\rho U)_x + (\rho V)_y = 0$$

și ecuația energiei

$$E = C_p T + U^2/2 = C_p T_W = C_p T_e + U_e^2/2 = \text{const.},$$

unde

$$\mu_f = \mu[1 + K(\eta_0 - \eta_2)U_a]; \quad \frac{\mu}{\mu_W} = \left(\frac{T}{T_W}\right)^\omega$$

$$\eta_0 = y/\delta; \quad \eta_2 = \int_0^y \rho U^2 \, dy' \Big/ \int_0^\delta \rho U^2 \, dy',$$

cu condițiile la limită

$$U = V = 0; \quad T = T_W; \quad \mu = \mu_W; \quad \rho = \rho_W \qquad \text{la } y = 0$$

$$U = U_e, \quad T = T_e; \quad \mu = \mu_e, \quad \rho = \rho_e$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} \simeq 0; \quad \frac{\partial T}{\partial y} \simeq 0 \qquad \text{la } y \quad \delta.$$

Scanned with OKEN Scanner

Formularea integro-diferențială a acestui sistem se efectuează după regulile indicate în §6.1. În compresibil transformarea de coordonate ține sea ma de faptul că densitatea variază, astfel că luăm

$$\xi = x;\ \eta = \int_0^y \rho U dy' \Big/ \int_0^\delta \rho U dy' = \psi/\psi_\delta.$$

Cu ajutorul acesteia se obține următorul sistem de ecuații integro-diferențială și respectiv diferențială

$$U_a^2 = \frac{1}{\rho_a \mu_{f_a}} \left[(\eta U_{a_\eta})^{\oplus} + \int_0^1 U_a^2 (\rho_a \mu_{f_a})_\eta \, d\eta \left(\frac{\int_0^\eta U_a^2 (\rho_a \mu_{f_a})_{\eta'} d\eta'}{\int_0^1 U_a^2 (\rho_a \mu_{f_a})_{\eta'} d\eta'} - (\eta U_{a_\eta})^{\oplus} \right) \right],$$

$$\frac{d\mathcal{R}e^2_{\psi_\delta}}{d\mathcal{R}e_x} - \frac{1 - \int_0^1 U_a^2 (\rho_a \mu_{f_a})_\eta \, d\eta}{\int_0^1 \eta^2 U_{a_\eta} d\eta} = 0,$$

cu condiția la limită $\mathcal{R}e_{\psi_\delta} = 0$ pentru $\mathcal{R}e_x = 0$ și în care am notat

$$U_a = \frac{U}{U_e};\ T_a = \frac{T - T_w}{T_e - T_w} = U_a^2;\ \frac{T}{T_e} = 1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 (1 - U_a^2);$$

$$\rho_a = \frac{\rho}{\rho_e} = \left(\frac{T}{T_e} \right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 (1 - U_a^2)};\ \frac{\mu}{\mu_w} = \left(\frac{T}{T_w} \right)^{\omega};\ \omega = 3/4.$$

$$K = 0{,}55\, \mathcal{R}e_{\psi_\delta}^{3/4} [1 - \exp(10^{-4{,}1}\, \mathcal{R}e_{\psi_\delta}^{1{,}05})] \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_e^2 \right)^{-0{,}1(1+\omega)}$$

$$\mu_{f_a} = \frac{\mu_f}{\mu_e},\ \mathcal{R}e_x = \frac{\rho_e U_e x}{\mu_e},$$

$$\mathcal{R}e_X = \frac{\rho_e U_e X}{\mu_e};\ \mathcal{R}e_{\psi_\delta} = \psi_\delta \mu_e^{-1}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Odată găsite U_a și $\mathcal{R}e_{\psi_\delta}$, grosimea stratului limită și coeficientul mediu de frecare pot fi determinați din formulele

$$\frac{\delta(x)}{X} = \frac{\mathcal{R}e_{\psi_\delta}}{\mathcal{R}e_X} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}\eta}{f_a\, U_a}, \quad K_f(x) = 2\,\frac{\mathcal{R}e_{\psi_\delta}}{\mathcal{R}e_X} \int_0^1 \eta U_{a_\eta}\, \mathrm{d}\eta.$$

Rezultatele referitoare la variația coeficientului de frecare în funcție de numărul Reynolds $\mathcal{R}e_X$ și numărul Mach sînt date în figura 6.5.1.

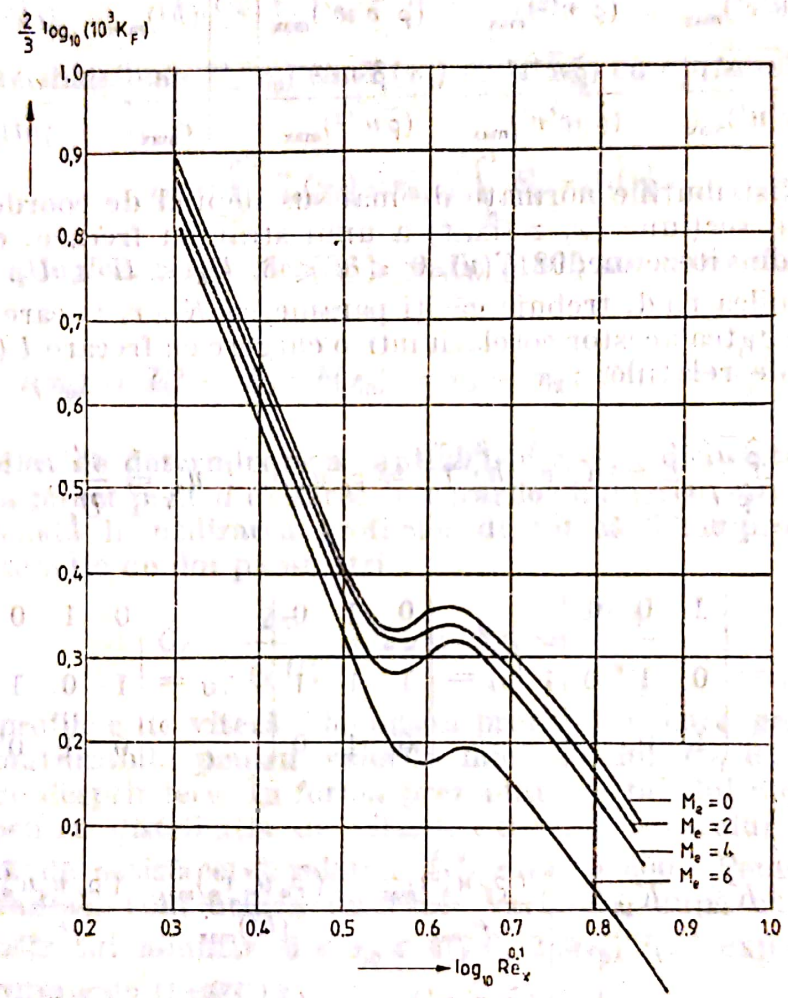


Fig. 6.5.1

§ 6.6. Distribuția tensorului tensiunilor Reynolds în curgerile cu frecare

O aplicație importantă a formulării integro-diferențiale o constituie elaborarea unei metode de prelucrare și interpretare a datelor experimentale referitoare la distribuția tensiunilor Reynolds în curgerile cu frecare. Scopul acestei metode este triplu : 1) prezintă un ghid unitar în alcătuirea unui program experimental și verificarea datelor obținute ; 2) furnizează

Scanned with OKEN Scanner

constante pentru exprimarea prin legi „universale" a corelațiilor ; 3) reprezintă un suport fizic pentru teoria fluctuațiilor, conform FID. Ne vom referi în special la lucrările [33], [151], [180], [181], [184], [187], [36]. În esență, este vorba, în primul rînd, de verificat experimental relația teoretică (pentru a-i stabili gradul de aproximație)

$$(6.6.1)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\tilde{\rho}\,\overline{u'^2}}{(\tilde{\rho}\,\overline{u'^2})_{\max}} & \dfrac{\tilde{\rho}\,\overline{u'v'}}{(\tilde{\rho}\,\overline{u'v'})_{\max}} & \dfrac{\tilde{\rho}\,\overline{u'w'}}{(\tilde{\rho}\,\overline{u'w'})_{\max}} \\ \dfrac{\tilde{\rho}\,\overline{(u'v')}}{(\tilde{\rho}\,\overline{u'v'})_{\max}} & \dfrac{\tilde{\rho}\,\overline{v'^2}}{(\tilde{\rho}\,\overline{v'^2})_{\max}} & \dfrac{\tilde{\rho}\,\overline{v'w'}}{(\tilde{\rho}\,\overline{v'w'})_{\max}} \\ \dfrac{\tilde{\rho}\,\overline{w'u'}}{(\tilde{\rho}\,\overline{w'u'})_{\max}} & \dfrac{\tilde{\rho}\,\overline{w'v'}}{(\tilde{\rho}\,\overline{w'v'})_{\max}} & \dfrac{\tilde{\rho}\,\overline{w'^2}}{(\tilde{\rho}\,\overline{w'^2})_{\max}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{e}{e_{\max}} & \dfrac{ht}{(ht)_{\max}} & \dfrac{e}{e_{\max}} \\ \dfrac{ht}{(ht)_{\max}} & \dfrac{eh}{(eh)_{\max}} & \dfrac{ht}{(ht)_{\max}} \\ \dfrac{e}{e_{\max}} & \dfrac{ht}{(ht)_{\max}} & \dfrac{e}{e_{\max}} \end{vmatrix}$$

unde toate distribuțiile normate de mai sus depind de coordonata $\eta_0 = y/\delta$ dintr-o secțiune (x, z fixat) a unui strat cu frecare, caracterizat de un profil de viteze mediu $U(y)$, $0 \leqslant y \leqslant \delta$, $U_0 \leqslant U \leqslant U_e$.

În al doilea rînd, trebuie găsiți parametrii $K_{ij}(x, z)$ care determină efectiv intensitatea acestor corelații într-o curgere cu frecare $U(y)$; $U(\delta) = U_e$, date de relațiile

$$\frac{\tilde{\rho}\,\overline{u'_i u'_j}}{\tilde{\rho}\,U_e^2} = K_{ij}\, e^{\alpha_{ij}} h^{\beta_{ij}} t^{\gamma_{ij}} = \tilde{\rho}_a\,\overline{u'_{a_i} u'_{a_j}}\ ;\ u'_{a_i} = \frac{u'_i}{U_e},$$

unde

$$\alpha_{ij} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix};\ \beta_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix};\ \gamma_{ij} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

și

$$(6.6.2)\qquad \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{(\tilde{\rho}_a\,\overline{u'^2_a})_{\max}}{e_{\max}} & \dfrac{(\tilde{\rho}_a\,\overline{u'_a v'_a})_{\max}}{(ht)_{\max}} & \dfrac{(\tilde{\rho}_a\,\overline{u'_a w'_a})_{\max}}{e_{\max}} \\ \dfrac{(\tilde{\rho}\,\overline{v'_a u'_a})_{\max}}{(ht)_{\max}} & \dfrac{(\tilde{\rho}_a\,\overline{v'^2_a})_{\max}}{(eh)_{\max}} & \dfrac{(\tilde{\rho}_a\,\overline{v'_a w'_a})_{\max}}{(ht)_{\max}} \\ \dfrac{(\tilde{\rho}_a\,\overline{w'_a u'_a})_{\max}}{e_{\max}} & \dfrac{(\tilde{\rho}_a\,\overline{w'_a v'_a})_{\max}}{(ht)_{\max}} & \dfrac{(\tilde{\rho}_a\,\overline{w'^2_a})_{\max}}{e_{\max}} \end{vmatrix}$$

Efectuarea acestei duble operații (verificarea relației (6.6.1) și determinarea lui K_{ij} din (6.6.2)) este actualmente extrem de dificilă din două cauze : a) datele experimentale prezentate sînt în general incomplete ; lipsesc elemente ale tensorului $\overline{u'_i u'_j}$, nu sînt puse în corespondență cu profilul de viteză corespunzător $U(y)$ și, în plus, reprezintă o gamă limitată de

numere Reynolds ; b) există mari diferenţe între rezultatele experimentale datorate tehnicii experimentale (fir cald, laser, hydrogen-bubble etc.), varietăţii condiţiilor experimentale (perturbare artificială, grad de turbulenţă al curentului exterior, curbură, compresibilitate, încălzirea pereţilor etc.). A fost deci pentru autori [36], [187] o sarcină deosebit de grea de a colecta un număr foarte mare de date şi de a le prelucra în modul următor :

a. Se scrie energia cinetică medie adimensionalizată

$$E_a(\eta_0) = \frac{\tilde{\rho}(U^2 + V^2 + W^2)}{\rho_e(U_e^2 + V_e^2 + W_e^2)} \approx \frac{\tilde{\rho}\, U^2}{\rho_e U_e^2} = \rho_a\, U_a^2(\eta_0)$$

b. Se redistribuie $E_a(\eta_0)$ ca $E_a(\eta_2) \equiv E_a^*(\eta_0)$ cu ajutorul noii coordonate

$$\eta_2 = \int_0^{\eta_0} E_a(\eta_0)\, \mathrm{d}\eta_0' \Big/ \int_0^1 E_a(\eta_0)\, \mathrm{d}\eta_0'.$$

c. Se calculează analitic [36], grafic [180] sau numeric [187] cantităţile :

$$e(\eta_0) = E_a^* - E_a\,;\quad h(\eta_0) = \eta_0 - \eta_2\,;\quad t(\eta_0) = \frac{\mathrm{d}E_a}{\mathrm{d}\eta_0}. \tag{6.6.3}$$

Metodica de determinare a cantităţilor e, h, t din date experimentale, pusă la punct pentru evitarea integrărilor numerice sau grafice aproximative constă în utilizarea profilelor de viteză Thompson [48] date analitic în funcţie de doi parametri

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_e U_e^2} = 2\varphi^2\,;\quad \mathcal{R}e_\delta = \frac{U_e\delta}{\nu}$$

Deşi profilele de viteză Thompson prezintă o mare generalitate, se dovedesc inutilizabile pentru valorile mici ale lui C_f, din vecinătatea punctului de desprindere. În forma prezentată în tabelul 6.6.1, cu intervale fixe pentru distribuţia de viteze, existenţa stratului interior este condiţionată de satisfacerea relaţiei $\sqrt{C_f/2}\,\mathcal{R}e_\delta \geqslant 600$. Pentru a elimina acest dezavantaj, vom utiliza intervale variabile, după cum urmează :

— substratul laminar $0 \leqslant \eta_0 \leqslant 4(\sqrt{C_f/2}\,\mathcal{R}e_\delta)^{-1}(1-\exp\{-\sqrt{p^*}\})$;

— regiunea de tranziţie

$$4(\sqrt{C_f/2}\,\mathcal{R}e_\delta)^{-1}(1-\exp\{-\sqrt{p^*}\}) \leqslant \eta_0 \leqslant 30(\sqrt{C_f/2}\,\mathcal{R}e_\delta)^{-1}(1-\exp\{-\sqrt{p^*}\})\,;$$

— stratul logaritmic

$$30(\sqrt{C_f/2}\,\mathcal{R}e_\delta)^{-1}(1-\exp\{-\sqrt{p^*}\}) \leqslant \eta_0 \leqslant 0{,}05$$

în care $p^* = U_e^2(C_f/2)^{3/2} \Big/ \left(\nu \left|\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x}\right|\right)^{-1}$. Prin introducerea acestui factor de corecţie se evită valorile infinite ale acestor intervale cînd $C_f \to 0$. La desprindere lungimea acestor intervale se anulează, fizic aceasta însemnînd dispariţia stratului interior de la perete, rămînînd numai stratul exterior dat de legea dîrei.

Scanned with OKEN Scanner

Tabelul nr. 6.6.1

Nr. crt.	(a_i, b_i)	U_a, $dU_a/d\eta_0$
1	$0 \leqslant \eta_0 \leqslant \frac{4}{\varphi \mathcal{R}e_\delta}$	$U_a = \varphi^2 \mathcal{R}e_\delta \eta_0$ $dU_a/d\eta_0 = \varphi^2 \mathcal{R}e_\delta$
2	$\frac{4}{\varphi \mathcal{R}e_\delta} < \eta \leqslant \frac{30}{\varphi \mathcal{R}e_\delta}$	$U_a = \varphi\{[4{,}187 - 5{,}745 \ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0) + 5{,}11[\ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0)]^2 - 0{,}767[\ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0)]^3\}$ $dU_a/d\eta_0 = \frac{\varphi}{\eta_0}\{-5{,}745 + 10{,}22 \ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0) - 2{,}301[\ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0)]^2\}$
3	$\frac{30}{\varphi \mathcal{R}e_\delta} < \eta_0 \leqslant 0{,}05$	$U_a = \varphi[2{,}39 \ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0) + 5{,}45]$ $dU_a/d\eta_0 = 2{,}39\,\varphi/\eta_0$
4	$0{,}05 < \eta_0 \leqslant 0{,}3$	$U_a = \varphi[2{,}39 \ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0) + 5{,}45] \times [1 - 2{,}64214(\eta_0 - 0{,}05)^2] + 2{,}64214(\eta_0 - 0{,}05)^2$ $dU_a/d\eta_0 = 2{,}39\frac{\varphi}{\eta_0}[1 - 2{,}64214(\eta_0 - 0{,}05)^2] - 5{,}28428(\eta_0 - 0{,}05)\varphi[2{,}39 \ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0) + 5{,}45] + 5{,}28428(\eta_0 - 0{,}05)$
5	$0{,}3 < \eta_0 \leqslant 0{,}7$	$U_a = \varphi[2{,}39 \ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0) + 5{,}45] \times [4{,}4053(\eta_0 - 0{,}5)^3 - 1{,}8502(\eta_0 - 0{,}5) + 0{,}5] + 0{,}5 + 1{,}8502(\eta_0 - 0{,}5) - 4{,}4053(\eta_0 - 0{,}5)^3$ $dU_a/d\eta_0 = 2{,}39\frac{\varphi}{\eta_0}[4{,}4053(\eta_0 - 0{,}5)^3 - 1{,}8502(\eta_0 - 0{,}5) + 0{,}5] + 1{,}8502 - 13{,}2159(\eta_0 - 0{,}5)^2 + \varphi[2{,}39 \ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0) + 5{,}45] \times [13{,}2159(\eta_0 - 0{,}5)^2 - 1{,}8502]$
6	$0{,}7 < \eta_0 \leqslant 0{,}95$	$U_a = \varphi[2{,}39 \ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0) + 5{,}45] \times 2{,}64214(0{,}95 - \eta_0)^2 + 1 - 2{,}64214(0{,}95 - \eta_0)^2$ $dU_a/d\eta_0 = 2{,}39\frac{\varphi}{\eta_0} 2{,}64214(0{,}95 - \eta_0)^2 + 5{,}28428(0{,}95 - \eta_0) \times \varphi[2{,}39 \ln(\varphi \mathcal{R}e_\delta \eta_0) + 5{,}45] - 5{,}28428(0{,}95 - \eta_0)$
7	$0{,}95 < \eta_0 \leqslant 1$	$U_a = 1$ $dU_a/d\eta_0 = 0$

Scanned with OKEN Scanner

Expresia generală a lui $U_{a_i}^2(\eta_0) = \left[\varphi\left(\sum_{j=0}^{j} C_{ij} X^j\right)\left(\sum_{k=0}^{k} S_{ik}\,\eta_0^k\right) + \right.$ $\left. + \sum_{k=0}^{k} r_{ik}\,\eta_0^k\right]^2$, unde $X = \ln(\varphi\,\mathcal{R}e_\delta\eta_0)$, iar C_{ij}, S_{ik}, r_{ik} date în lucrarea [36], este integrabilă analitic. Se obține

$$\eta_{i2} = \frac{\sum_{i=1}^{i-1}\int_{a_i}^{b_i} U_{a_i}^2\,\mathrm{d}\eta_0' + \int_{a_i}^{\eta_0} U_{a_i}^2\,\mathrm{d}\eta_0'}{\sum_{i=1}^{7}\int_{a_i}^{b_i} U_{a_i}^2\,\mathrm{d}\eta_0'}, \quad 0 \leqslant \eta_0 < b_i, \quad i = 1 \div 7$$

care este o formulă algebrică lungă, ce permite însă o evaluare exactă a mărimilor

$$h(\eta_0) = \eta_0 - \eta_{i2}(\eta_0); \quad e(\eta_0') = U_a^2(\eta_0) - U_a^2(\eta_0'); \quad t(\eta_0) = 2U_a\frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{d}\eta_0}.$$

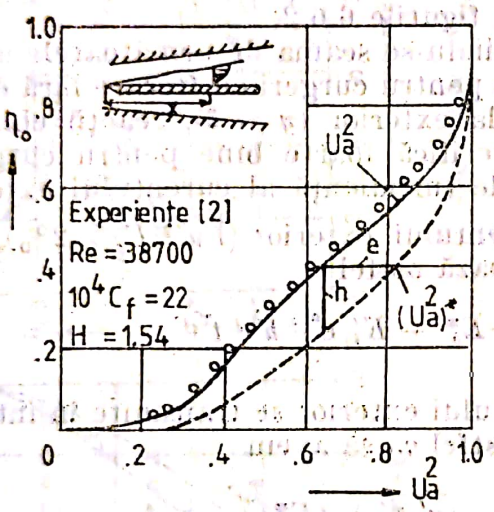


Fig. 6.6.1a

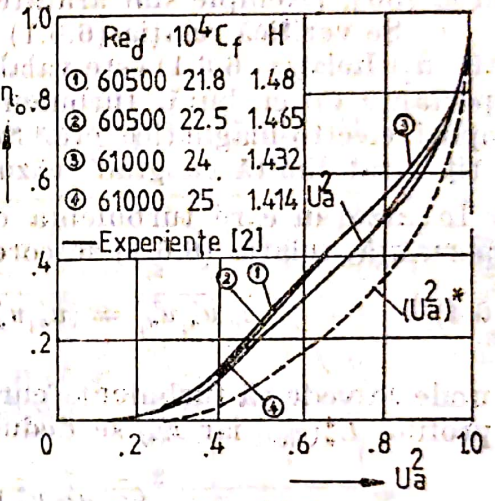


Fig. 6.6.1b

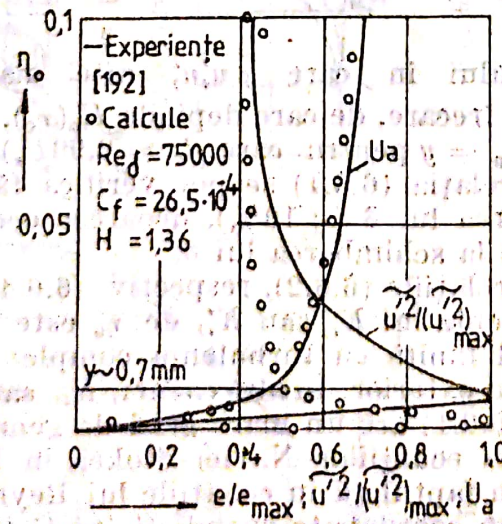


Fig. 6.6.1c

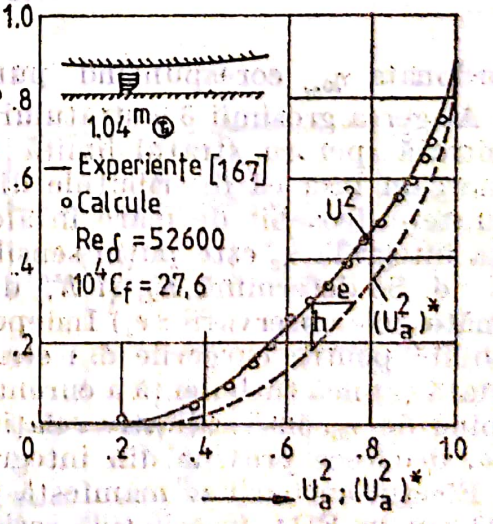


Fig. 6.6.1d

În figurile 6.6.1 se dau exemple de reprezentare a lui $U_a(\eta_0)$ prin profile Thompson și de utilizare a calculelor analitice pentru determinarea lui e/e_{max}.

O extindere formală la reprezentarea profilelor din curgerile compresibile adiabatice se face pornind de la profile echivalente Thompson

$$U_{a/}^2(C_f^*,\ \mathscr{R}e_\delta^*) = \frac{U_a^2}{1 + \dfrac{\varkappa - 1}{2} M_e^2(1 - U_a^2)},$$

unde :

$$C_f^* = \frac{C_f}{\left(1 + r\dfrac{\varkappa - 1}{2} M_e^2\right)^s};\quad \mathscr{R}e_\delta^* = \mathscr{R}e_\delta\left(1 + r_1\frac{\varkappa - 1}{2} M_e^2\right)^{s_1}$$

U_a, C_f, $\mathscr{R}e_\delta$ fiind datele profilului incompresibil echivalent. Parametrii de aproximare r, s, r_1, s_1 au valori în jurul unității. Pentru detalii trimitem la [36]. Exemple sînt arătate în figurile 6.6.2.

d. Se verifică relația (6.6.1) ținîndu-se seama de următoarele observații : d_1) Relația (6.6.1) este valabilă pentru curgeri cu frecare fără efecte importante de curbură, turbulență la exterior ($y = \delta$), reacții chimice, cîmpuri electro-magnetice etc. Se verifică foarte bine pentru curgerile de tip strat limită cu grad scăzut de turbulență al curentului exterior. d_2) În cazul în care turbulența curentului exterior ($\sqrt{\overline{u'^2}}/U_e > 2\%$) este importantă, relația (6.6.1) se corectează astfel

$$\tilde{\rho}_a\,\overline{u'_{a_i}u'_{a_j}} = (\overline{u'_{a_i}u'_{a_j}})_e \cdot E_a^* + K'_{ij}\,e^{\alpha_{ij}}\,h^{\beta_{ij}}\,t^{\gamma_{ij}} \tag{6.6.4}$$

de unde se vede că turbulența curentului exterior se transmite în interior ca profilul $E_a^*(\eta_0)$, iar K'_{ij} se deduc astfel ca să avem

$$K'_{ij} = \frac{(\tilde{\rho}_a\,\overline{u'_{a_i}u'_{a_j}})_{\max} - (\overline{u'_{a_i}u'_{a_j}})_e\ (E_a^*)_{\eta_{0_M}}}{(e^{\alpha_{ij}}\,h^{\beta_{ij}}\,t^{\gamma_{ij}})_{\eta_{0_M}}},$$

coordonata η_{0_M} corespunzînd punctului în care $\tilde{\rho}\,\overline{u'_i u'_j}$ este maxim. d_3) Alegerea grosimii δ a stratului cu frecare, de care depinde $U_a(\eta_0)$, este arbitrară (pentru stratul limită $\delta_{0.99} = y$ pentru care $U = 0{,}99\,U_e$). Să remarcăm însă că distribuțiile din relația (6.6.1) se pot verifica fără o acurateță deosebit de mare în alegerea lui δ ($\pm 10\%$), deoarece coordonata integrală η_2 este puțin sensibilă la schimbarea lui δ.

e. Se determină K_{ij} și K'_{ij} din relațiile (6.6.2), respectiv (6.6.4), cu următoarele observații : e_1) Independența lui K_{ij} sau K'_{ij} de η_0 este bine stabilită pentru curgerile din stratul limită cu turbulența complet dezvoltată și mică turbulență a curentului exterior. În alte cazuri, K_{ij} sau K'_{ij} depind de η_0, însă calitativ relația (6.6.1) are un mare grad de generalitate, deoarece provine din integrarea ecuațiilor Navier-Stokes în FID. e_2) Efectul curburii se manifestă prin faptul că în ecuațiile lui Reynolds [78] sau în FID, în ecuațiile scrise în coordonate curbilinii (§4.4) intervine parametrul

$$F_c = U/R \Big/ \frac{\partial U}{\partial y} = F_c(\eta_0)$$

Scanned with OKEN Scanner

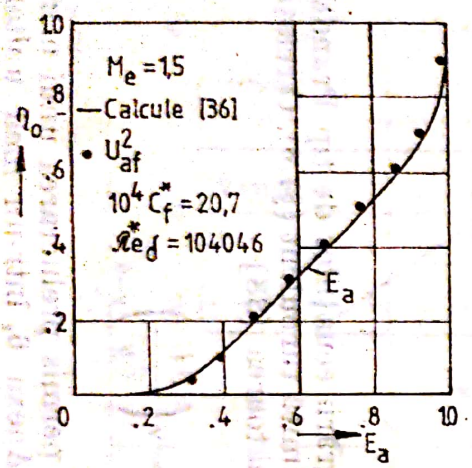


Fig. 6.6.2a

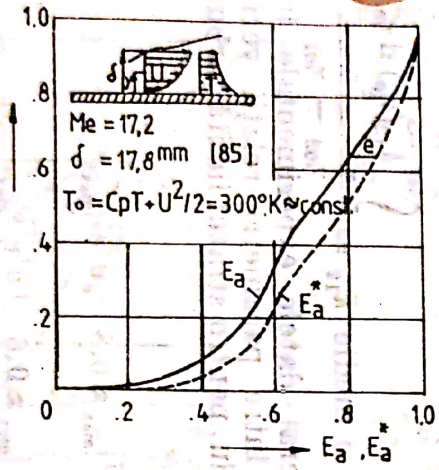


Fig. 6.6.2b

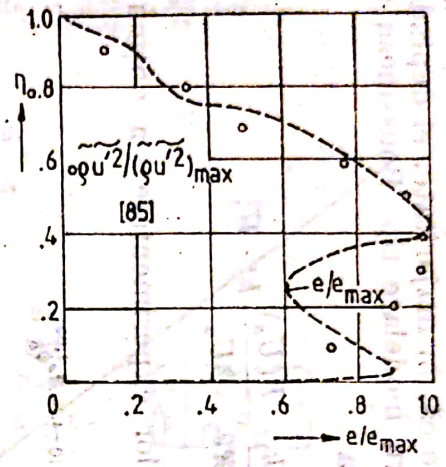


Fig. 6.6.2c

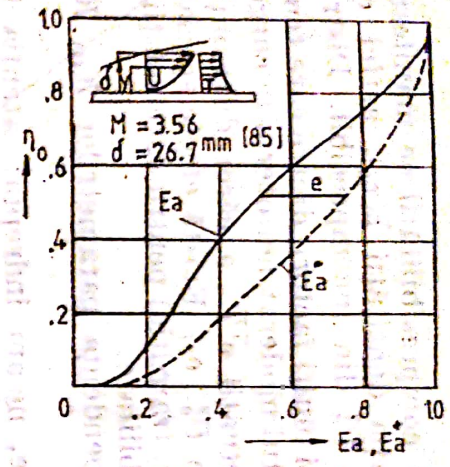


Fig. 6.6.2d

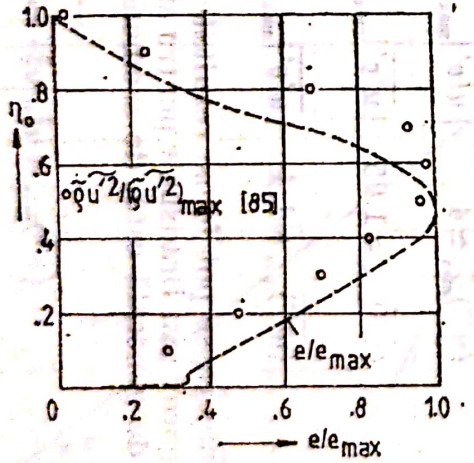


Fig. 6.6.2e

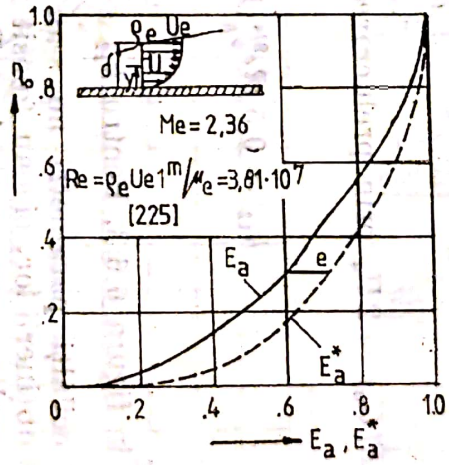


Fig. 6.6.2f

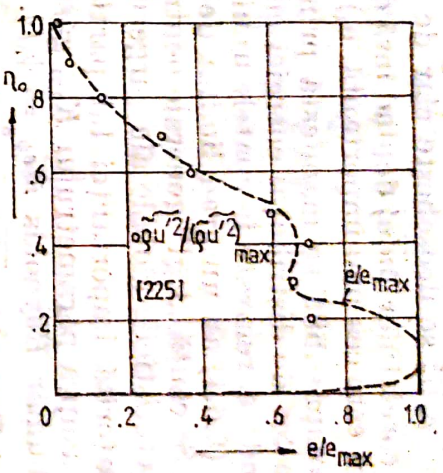


Fig. 6.6.2g

care afectează corelațiile $\overline{u_i' u_j'}$. e$_3$) Efectul compresibilității se manifestă în stratul cu frecare adiabatic prin variația densității $\tilde{\rho}(\eta_0)$, astfel că $E_a(\eta_0) = \rho_a U_a^2$ se deosebește clar de $E_a = U_a^2$ din incompresibil. Distribuțiile corelațiilor $\tilde{\rho}\overline{u_i' u_j'}$ depind însă de mai mulți factori, dintre care temperatura este cea mai importantă. e$_4$) Efectul moderat neizoterm în curgerea incompresibilă se manifestă prin fluctuații $\overline{v'T'}$, a căror distribuție depinde tot de distribuția energiei cinetice U_a^2. e$_5$) Există efecte speciale (desprindere, relaxare în spatele unui prag, tranziție) pentru care relațiile (6.6.1), (6.6.4) au un grad limitat de valabilitate.

f. Se caută „legi" generale pentru dependența parametrilor K_{ij}, K'_{ij} de caracteristicile globale ale curgerii.

Datorită importanței lui particulare, ne-am îndreptat atenția în special asupra parametrului K_{12}, găsindu-se că, în majoritate, el depinde de un număr Reynolds $\mathcal{R}e_{\psi_\delta} = \psi_\delta/\nu$. Pentru modelare tip Boussinesq a tensiunii Reynolds $\overline{u'v'}$ s-a utilizat formula

$$|-\overline{u'v'}| = \nu k_{12}\, h\, F(U_a)\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{k_{12}}{\mathcal{R}e_\delta}\frac{F(U_a)}{2U_a}\, ht \cdot U_e^2.$$

Luînd $F(U_a) \sim 2U_a$ prin prelucrarea datelor experimentale s-a obținut relația

$$k_{12} = 0{,}5\, \mathcal{R}e_{\psi_\delta}^{3/4}(1 - e^{-10^{-4{,}75}\mathcal{R}e_{\psi_\delta}^{1{,}05}})$$

trasată în figura 6.6.3. Pentru k_{12} s-a luat o medie $k_{12} = \dfrac{\int_{\eta_{01}}^{\eta_{02}} k_{12}(\eta_0)\, d\eta_0}{\eta_{02} - \eta_{01}}$.

Pentru ceilalți parametri nu s-au prelucrat datele experimentale în vederea obținerii lor, ci s-au folosit relații între parametri, relații verificate în multe cazuri particulare. De exemplu, pentru stratul limită turbulent, avem orientativ

$$(\overline{u'^2})_{max} \simeq 4 \quad |\overline{u'v'}|_{max}, \quad |\overline{u'w'}|_{max} \approx 0{,}8 \quad |\overline{u'v'}|_{max},$$

$$(\overline{v'^2})_{max} \approx 1{,}25 \quad |\overline{u'v'}|_{max}, \quad |\overline{v'w'}|_{max} \approx 0{,}6 \quad |\overline{u'v'}|_{max},$$

$$(\overline{w'^2})_{max} \approx 1{,}4 \quad |\overline{u'v'}|_{max}.$$

De asemenea se pot folosi rezultatele integrării ecuațiilor de tip Prandtl-Kolmogorov sau Bradshaw pentru stratul limită turbulent (§4.6). O relație destul de generală este, de asemenea, următoarea [38]

$$(\widetilde{v'^2})_{max} \approx u_\tau^2,\ u_\tau^2 = \tau_w/\rho = \nu\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

Metoda indicată în acest paragraf a permis prelucrarea unui mare număr de date experimentale, indicate în Anexa 6, într-un mod unitar.

Scanned with OKEN Scanner

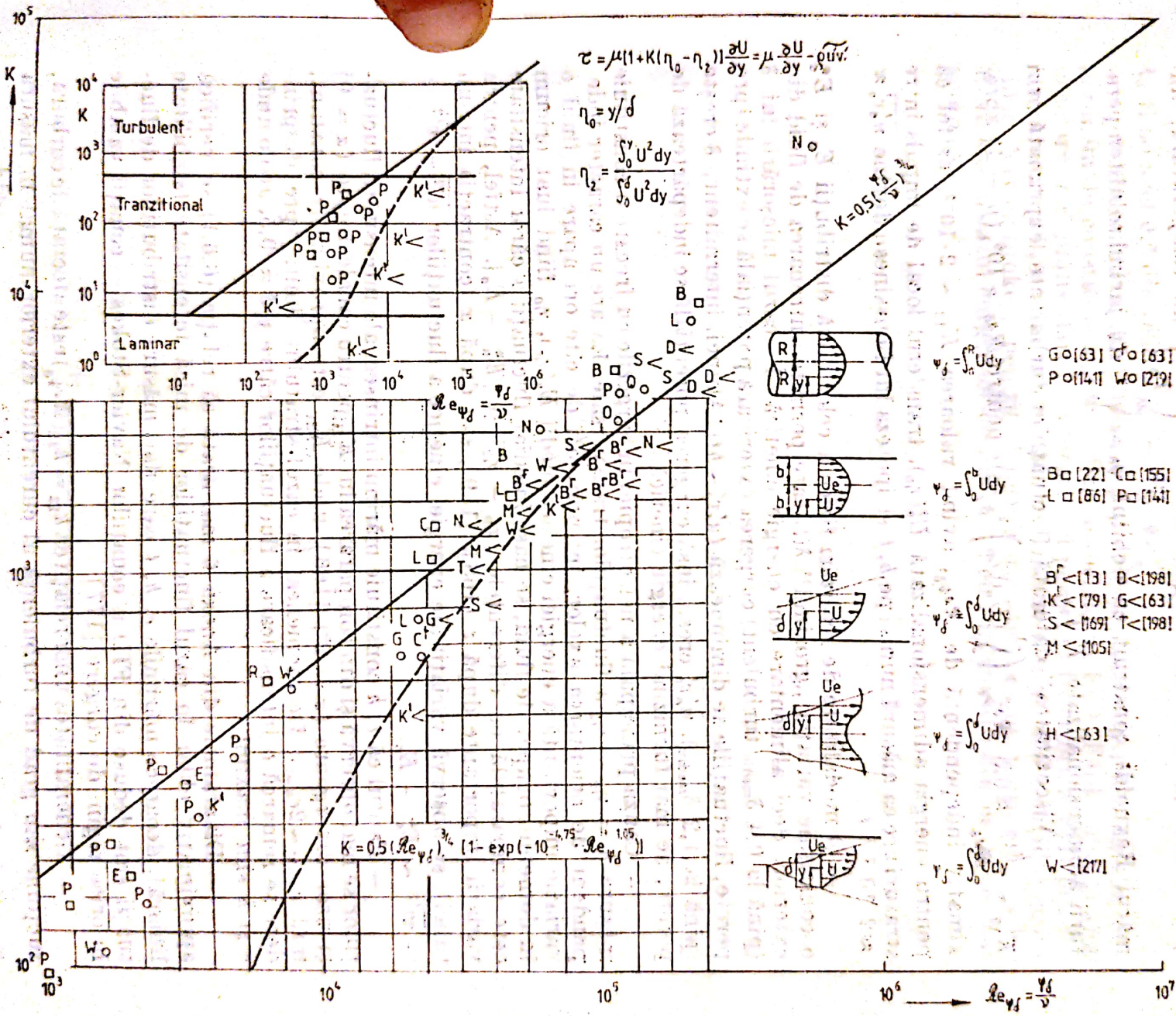

Turbulent
Tranzitional
Laminar
K
$\tau = \mu[1+K(\eta_0-\eta_2)]\frac{\partial U}{\partial y} = \mu\frac{\partial U}{\partial y} - \rho\overline{uv}$
$\eta_0 = y/\delta$
$\eta_2 = \frac{\int_0^y U^2 dy}{\int_0^\delta U^2 dy}$
$K = 0{,}5\left(\frac{\psi_\delta}{\nu}\right)^{3/4}$
$Re_{\psi_\delta} = \frac{\psi_\delta}{\nu}$
$K = 0{,}5\,(Re_{\psi_\delta})^{3/4}\,[1-\exp(-10^{-4,75}\cdot Re_{\psi_\delta}^{1,05})]$
$\psi_\delta = \int_0^R U dy$
$\psi_\delta = \int_0^b U dy$
$\psi_\delta = \int_0^\delta U dy$
$\psi_\delta = \int_0^\delta U dy$
$\gamma_\delta = \int_0^\delta U dy$
G o [63] C o [63] N o [180]
P o [141] W o [219] L o [87]
B □ [22] C □ [155] E □ [34]
L □ [86] P □ [141] R □ [142]
B < [13] D < [198] K' < [77]
K' < [79] G < [63]
S < [169] T < [198] N < [198]
M < [105]
H < [63]
W < [217]

Fig. 6.6.3

Această prelucrare sistematică precum și generalitatea relației $k_{12}=k_{12}(\mathcal{R}e_{\psi_\delta})$ ilustrată în figura 6.6.3, merită cîteva observații :

— „Viscozitatea" datorită fluctuațiilor turbulente dezvoltate, exprimată prin $k_{12} = 0{,}5\ \mathcal{R}e_{\psi_\delta}^{3/4}$, sugerează o comportare analoagă dependenței viscozității moleculare a gazelor $\frac{\mu}{\mu_0} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^p$ de temperatură, numărul Reynolds construit cu debitul $\psi_\delta = \int_0^\delta U\,dy$ jucînd rolul temperaturii adimensionalizate T/T_0.

— „Viscozitatea" datorată fluctuațiilor turbulente, exprimată prin $K_{12} = \frac{k_{12}}{\mathcal{R}e_\delta} \approx 0{,}5\ \mathcal{R}e_{\psi_\delta}^{p-1}\left(\int_0^1 (U_a d\eta_0\right)^{-1}$, este pentru $\mathcal{R}e_\delta > 10^6$, $(p \sim 1)$ aproximativ independentă de $\mathcal{R}e_{\psi_\delta}$, avînd valoarea $K_{12} \sim 2\cdot 10^{-2}$, astfel că pentru energia adimensionalizată $U_a^2(\eta_0)$, transferul local de impuls între straturi are ca măsură numai pe h, t și ipoteza lui Boussinesq devine $\overline{u'_a v'_a} \approx \approx 2\cdot 10^{-2}\ h\ t$.

— O modalitate de realizări fizice a celor două distribuții E_a și E_a^* o constituie variația „grosimii" $\delta(t)$ care permite antrenarea de fluid din exterior, deci alimentare cu energie cinetică. În cazul micșorării lui δ (pînă la 0,4 δ_{mediu} turbulent) curgerea exterioară potențială se extinde spre perete, fluctuațiile se diminuează ($\overline{u'_a v'_a} \sim ht$). Atunci, intermitent, δ crește (pînă la 1,2 δ_{mediu}), $\overline{u'_a v'_a}$ cresc, însă curgerea potențială se îndepărtează de perete, ne mai furnizînd energie cinetică.

— Cauza principală a neizotropiei în curgerile cu frecare o constituie măsura $h = \eta_0 - \eta_2$ a fluctuațiilor transversale. Ea are un caracter independent de orientarea axelor, întrucît, ori de cîte ori apare în fluid o variație importantă a energiei cinetice medii $E_a(\eta_0)$, η_0 fiind luat oricum în domeniul ocupat de fluid, se nasc imediat fluctuații a căror intensitate este comparabilă cu diferențele $|\eta_0 - \eta_2|$ și $|E_a^* - E_a|$. Astfel, pentru variații importante după z [168], [159], sau după x (contracția într-un tunel), se observă variații ale energiei cinetice a fluctuațiilor $\overline{u'^2} + \overline{v'^2} + \overline{w'^2} \sim E_a^* - E_a$.

— Faptul că e, h constituie mărimi intrinseci ale intensității fluctuațiilor se mai observă și din compararea lui K_{11} pentru canale drepte ($\alpha = 0$) și ușor divergente ($\alpha = 2°$) [166], unde K_{11} este aproximativ constant, însă $e_{\alpha=2°} \sim 2e_{\alpha=0°}$. De asemenea, în cazul stratului limită spre desprindere se remarcă o intensificare a fluctuațiilor către $y/\delta \approx 0{,}5$, acolo unde e și h sînt maximi.

— Diagramele din Anexa 6 mai arată că relația (6.6.1) se verifică aproximativ chiar în cazul fluctuațiilor de mică intensitate (stabilitate liniară), deoarece mărimile e, h, t care dau măsura distribuțiilor de fluctuații sînt deduse din FID a ecuațiilor Navier-Stokes — ecuații valabile în orice regim de curgere [177].

— Generalitatea unor relații ca $k_{12} = k_{12}(\mathcal{R}e_{\psi_\delta})$ este afectată de curbură, sucțiune sau grad de turbulență al curentului exterior numai în măsura în care în deducerea lui e, h, t se pornește de la ecuația $\frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = \Sigma f_i$,

fără a introduce efectele de curbură sau ale condiţiilor la limită speciale. Aceste efecte se pot corecta practic punînd

$$k_{0cor} \simeq k_0 \left(1 - \frac{\delta}{R}\right)\left(1 - \frac{v_w}{U_e}\right)\left(1 + \frac{\sqrt{\overline{u_e'^2}}}{U_e}\right)$$

k_0 fiind acel 0,5 din relaţia $k_{12} = 0{,}5\ \mathcal{R}e_{\psi_8}^{3/4}$.

— Prezentarea din Anexa 6 a prelucrării sistematice a datelor experimentale constituie suportul fizic principal al FID. Fără îndoială sînt necesare încă multe date şi interpretări pentru a transforma FID într-un instrument util, fondat matematic pe analiza calitativă a soluţiilor ecuaţiilor Navier-Stokes, pentru determinarea tensorului tensiunilor a lui Reynolds în cazul curgerilor cu fluctuaţii cu configuraţii din ce în ce mai complexe.

Scanned with OKEN Scanner

ANEXE

Anexa 1. Principii de maximum. Teoreme de comparaţie

A.1.1. Valoarea maximă a unei funcţii

Să considerăm mai întîi problema valorii maxime a unei funcţii de clasă C^1 definită pe o mulţime din R^n. Numim punct de maxim local un punct din domeniul de definiţie pentru care există o vecinătate, astfel încît diferenţa dintre valoarea funcţiei în acel punct şi valoarea funcţiei în orice punct al vecinătăţii să fie pozitivă ($\geqslant 0$). Cazul minimului corespunde diferenţei negative ($\leqslant 0$).

Cazul $n = 1$. Fie $f : (a, b) \to R$, $(a, b \in \bar{R})$ o funcţie de clasă $C^2(a, b)$. $x_0 \in (a, b)$ este un punct de maxim (local) dacă şi numai dacă $f'(x_0) = 0$ şi $f''(x_0) < 0$. Se poate ca valoarea maximă a lui f să fie atinsă în unul din maximele locale sau se poate ca ea să nu existe (în sensul că este atinsă în punctele din $[a, b] \setminus (a, b)$). Dacă $f : [a, b] \to R$, $a, b \in R$, atunci valoarea maximă a lui f poate fi atinsă fie într-un punct de maxim local din interiorul lui $[a, b]$, fie în punctul frontieră $x_0 = a$, unde este necesar ca $f'_d(x_0 \leqslant 0$ (d indică derivarea la dreapta), fie în punctul frontieră $x_0 = b$ în care trebuie să avem $f'_s(x_0) \geqslant 0$ (s indică derivarea la stînga). Aceste ultime două condiţii pot fi scrise sub forma :

$$f'(x_0)(x - x_0) \leqslant 0, \tag{A.1.1}$$

condiţie care rezultă din definiţia maximului

$$0 \geqslant f(x) - f(x_0) \approx f'(x_0)(x - x_0).$$

Pentru minim, toate inegalităţile de mai sus se inversează.

Cazul $n = 2$. Fie $f : \Omega \to R$ o funcţie de clasă $C^2(\Omega)$, unde Ω este un domeniu din R. O condiţie necesară ca $(x_0, y_0) \in \Omega$ să fie un punct de maxim local pentru f este ca

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = 0. \tag{A.1.2}$$

O condiţie suficientă ca $(x_0, y_0) \in \Omega$ care satisface (A.1.2) să fie un punct de maxim local pentru f este ca

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{(x_0, y_0)} < 0, \tag{A.1.3}$$

Scanned with OKEN Scanner

şi

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\right)^2\right]_{(x_0,\,y_0)}>0. \tag{A.1.4}$$

Dacă în inegalitatea (A.1.4) avem sensul <0, atunci (x_0, y_0) sigur nu este punct de maxim. Dacă inegalitatea (A.1.4) devine egalitate cu 0 în (x_0, y_0) s-ar putea ca (x_0, y_0) să fie punct de maxim sau nu. Acest caz trebuie analizat pentru fiecare funcţie şi (x_0, y_0) în parte.

Pentru punctul de minim toate raţionamentele se păstrează, afară de sensul inegalităţii (A.1.3), care trebuie înlocuit cu $>$.

Să presupunem acum că domeniul de definiţie al lui f este un compact $\bar{\Omega}=\Omega+\partial\Omega$ şi deci există posibilitatea ca valoarea maximă a lui f să fie atinsă pe frontieră. Dacă $(x_0, y_0)\in\partial\Omega$ după definiţie avem că o condiţie necesară ca el să fie punct de maxim pentru f este ca să existe o vecinătate V_{x_0} astfel ca $\forall(x_0, y_0)\in V_{x_0}\cap\partial\Omega$ să aibă loc inegalitatea,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(y-y_0)\leqslant 0. \tag{A.1.1)'}$$

Această condiţie exprimă faptul că proiecţia normalei în (x_0, y_0) la suprafaţa $z=f(x, y)$ pe vectorul diferenţă $(x, y, z_0)-(x_0, y_0, z_0)$ din planul $z=z_0$ să fie negativă, adică cei doi vectori să facă un unghi obtuz. Caracterizarea intuitivă geometrică care rezultă din această condiţie este : normala în (x_0, y_0) la suprafaţa $z=f(x, y)$ este sub planul $z=z_0$, suprafaţa $z=f(x, y)$ este sub acest plan (local), de o singură parte a planului tangent, ea coborînd pe măsura depărtării punctului (x, y, z) de (x_0, y_0, z_0). În cazul funcţiei de o variabilă locul planului este luat de o dreaptă $y=y_0$, iar cel al suprafeţei, de curba $y=f(x)$. (Sensul care duce de la o tangentă la o curbă din planul tangent în (x_0, y_0, z_0) la suprafaţa $z=f(x, y)$ la normală este ales cel trigonometric). Consideraţii mai generale în acelaşi spirit se pot găsi în [197].

Cazul general. Fie $f:\Omega\to R$ o funcţie de clasă $C^2(\Omega)$, unde Ω este un domeniu din R^n şi fie în el un punct $x_0=(x_1, \ldots, x_n)$. Condiţia necesară ca f să fie un punct de maxim (minim) local pentru f este ca el să satisfacă sistemul

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{x_0}=0,\ i=1, 2, \ldots, n. \tag{A.1.2)'}$$

O condiţie suficientă ca x_0 să fie punct de maxim (minim) este ca forma pătratică $\varphi=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i\,\partial x_j}\alpha_i\alpha_j$ să fie negativ definită, adică $\varphi<0$ (pozitiv definită, adică $\varphi>0$).

Dacă forma pătratică φ este nedefinită în x_0, atunci x_0 nu este punct de maxim (minim). Din nou, pentru cazul $\varphi=0$ nu se poate

Scanned with OKEN Scanner

afirma în general nimic. Condiţia necesară şi suficientă pentru ca forma pătratică să fie negativ definită este ca

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0, \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} > 0, \ldots, (-1)^n \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} > 0.$$

(A.1.4)'

Condiţia necesară şi suficientă ca forma pătratică φ, să fie pozitiv definită este ca toţi determinanţii din (A.1.4)' să fie pozitivi (>0). Pentru cazul $n = 2$, condiţia (A.1.4) se reduce la (A.1.3) şi (A.1.4), iar dacă $n = 1$, la $f'' > 0$. Dacă $f : \bar{\Omega} \to R$, pentru a determina valoarea maximă a lui f avem condiţia necesară

$$\text{(A.1.1)''} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1 - x_{10}) + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_n - x_{n0}) \leqslant 0,$$

ca punctul $(x_{10}, \ldots, x_{n0}) \in \partial\Omega$ să constituie un punct de maxim la frontieră. Restul raţionamentelor este analog cu cazul $n = 2$.

A.1.2. Principii de maxim pentru ecuaţii eliptice şi parabolice

Principiile de maxim generalizează la cazul operatorilor cele spuse mai sus pentru funcţii reale. Să dăm un exemplu care face tranziţia de la un caz la altul mai puţin abruptă. Fie deci operatorul L definit astfel $Lu = u''$, unde $u : [a, b] \to R$, $u \in C^2[a, b]$. Dacă pentru $x \in (a, b)$ avem $Lu(x) \geqslant 0$ deci $u''(x) \geqslant 0$, rezultă că u nu poate avea un maxim local în (a, b), afară de cazul cînd u este o funcţie constantă. Dacă în plus ştim că $u(x) = 0$ pe frontiera lui $[a, b]$ deci în punctele $x = a$ şi $x = b$, atunci din faptul că $Lu \geqslant 0$ în (a, b) şi $u(x) = 0$ pe frontiera lui (a, b) rezultă $u \leqslant 0$ în (a, b), căci maximul lui $u(x)$ poate fi atins doar pe frontieră şi acolo el este 0.

Principiile de maxim care urmează sînt propoziţii de următorul tip. Fie L un operator diferenţial de ordinul doi care se aplică funcţiei $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$, unde Ω este un domeniu R^n : dacă $Lu \geqslant 0$ în Ω şi $Bu \leqslant 0$ pe $\partial\Omega$, atunci $u \geqslant 0$ în Ω. Cu B am notat operatorul diferenţial de ordinul întîi definit pe mulţimea funcţiilor u definite pe $\partial\Omega$ şi care operator exprimă deci condiţiile la limită. De fapt, după cum se va vedea, principiul de maxim afirmă că în anumite condiţii pentru L şi B avem că u nu poate lua valoarea maximă în interiorul lui Ω şi că derivata sa în direcţie arbitrară $\partial\Omega$ are un anumit semn. Din aceasta va rezulta principiul sub forma echivalentă enunţată.

Fie

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Scanned with OKEN Scanner

un operator definit pe mulțimea funcțiilor $u \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset R^n$, Ω domeniu, a_{ij} sînt funcții netede de x, unde x este un punct arbitrar din Ω. Spunem că L este un operator tare eliptic dacă $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j \geqslant \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$, unde $\mu > 0$.

TEOREMA A.1.1. *Fie $Lu \geqslant 0$ în Ω, unde L este operatorul definit mai sus. Dacă $u \leqslant M \in R$ în Ω și $u = M$ într-un punct din interiorul lui Ω, atunci $u \equiv M$ în Ω.*

De aici rezultă că dacă $Lu = 0$ în Ω, atunci u își atinge maximul și minimul pe $\partial\Omega$.

TEOREMA A.1.2. *Fie $Lu \geqslant 0$ în Ω, $u \leqslant M \in R$ pe $\partial\Omega$ și $u = M$ în $x_0 \in \partial\Omega$. Să presupunem că există o sferă $K \subset \Omega$ tangentă la $\partial\Omega$ în x_0. Dacă u este continuă în x_0 și $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ există (unde ν este o derivată în direcția exterioară ν), atunci $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0) > 0$ afară de cazul cînd $u \equiv M$ în Ω.*

Pentru operatori eliptici mai generali $L + C(x)u$, în anumite condiții (în general ca $c(x) \leqslant 0$) se pot da teoreme de maxim analoage.

Fie acum $L - \frac{\partial}{\partial t}$ un operator parabolic.

TEOREMA A.1.1'. *Fie deci $Lu - \frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$ în $\Omega \times (0, T)$. Dacă $u \leqslant M$ în $\Omega \times (0, T)$ și $u = M$ în $(x_0, t_0) \in \Omega \times (0, T)$, atunci $u \equiv M$ în $\Omega \times (0, t_0]$.*

TEOREMA A.1.2'. *Fie $Lu - \frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$ în $\Omega \times (0, T)$. Dacă u ia valoarea maximă M într-un punct $(x_0, t_0) \in \partial\Omega \times (0, T)$ și dacă $u < M$ în interiorul lui $\Omega \times (0, T)$, atunci $\frac{\partial u}{\partial \nu}(x_0, t_0) = 0$*

Pentru operatori parabolici mai generali $L + c(x, t) - \frac{\partial}{\partial t}$ principiul de maxim se menține fără restricții asupra semnului lui $c(x, t)$. Mai exact

TEOREMA A.1.3. *Fie $Lu + c(x, t)u - \frac{\partial u}{\partial t} \geqslant 0$ în $\Omega \times (0, T)$ și $u(x, t) \leqslant 0$ pe $\Omega \times [0, T)$. Atunci $u(x, t) \leqslant 0$ în $\Omega \times (0, T)$.*

Pentru alte principii de maxim trimitem la [156] și [199].

În lemele care stabileau mărginiri pentru soluțiile ecuației lui Prandtl și a derivatelor sale se ajungea, de exemplu, la inegalități de tipul $Lu \geqslant 0$ în Ω și $u \leqslant 0$ pe $\partial\Omega$, unde L era un operator diferențial de ordinul doi, liniar sau nu, Ω era mărginit sau nu, deschis sau închis, dim $\Omega = n$ cu $n = 1, 2, 3$. Tipul operatorului L se încadra într-o teoremă de maxim astfel că rezulta $u \leqslant 0$ în Ω. În alte cazuri, problema era redusă la $Lu \geqslant 0$ în Ω, $u = 0$ în anumite puncte $x_0' \in \partial\Omega$ și $a(x)u + b(x)\frac{\partial u}{\partial \nu} < 0$ în celelalte puncte $x_0'' \in \partial\Omega$. Din nou tipul lui L permitea aplicarea unui principiu de maxim. Se presupunea atunci că $u \leqslant 0$ pe toată $\partial\Omega$ de unde,

Scanned with OKEN Scanner

după teoremele de maxim, rezultă $u \leqslant 0$ în Ω și $\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0$ în x_0'', care erau în contradicție cu condiția în x_0'', de unde rezultă $u > 0$ în Ω. De obicei, u era diferența dintre soluția φ necunoscută a ecuației lui Prandtl și o funcție f cunoscută. Uneori această diferență apărea înmulțită cu o exponențială. Demonstrarea, cu ajutorul principiului maximului, a inegalității $u \leqslant 0$, de exemplu, conducea imediat la mărginirea $\varphi \leqslant f$. Dacă $u = \varphi_1 - \varphi_2$, unde φ_1 și φ_2 erau două soluții ale ecuației lui Prandtl, atunci principiul de maxim ajuta la demonstrarea unicității.

A.1.3. Teoreme de comparație

Fie ecuațiile diferențiale ordinare

$$\frac{du}{dt} = f(t, x), \tag{A.1.5}$$

$$\frac{du}{dt} = g(t, x), \tag{A.1.6}$$

unde $f, g : J \times R^+ \to R^+$, $J = (\tau, \infty)$, $\tau \in R$ sau $\tau = -\infty$, $R^+ = [0, \infty)$. Avem [165]

TEOREMA A.1.4. *Fie $g : J \times R^+ \to R^+$ și să presupunem că funcția $(t, u) \to g(t, u)$ este continuă și astfel încît ecuația* (A.1.6) *are o soluție unică $u(t; t_0, u_0)$ (am notat $u|_{t=t_0} = u_0$) pentru orice $(t, u_0) \in J \times R^+$. Fie $[t_0, \beta]$ intervalul maxim pe care $u(t; t_0, u_0)$ și $x(t; t_0, x_0)$ (unde $x_0 = x|_{t=t_0}$) pot fi definite. Dacă*

1) $$x_0 \leqslant u_0,$$

2) $$f(t, x(t)) \leqslant g(t, x(t)) \text{ pe } [t_0, \beta),$$

atunci

$$x(t) \leqslant u(t) \text{ pentru orice } t \in [t_0, \beta). \tag{A.1.7}$$

Această teoremă este una dintre cele mai simple teoreme de comparație și ea indică că valabilitatea anumitor inegalități între f și g și dintre soluțiile x și u la momentul t_0 antrenează valabilitatea acestei ultime inegalități pentru soluții pe un întreg interval ulterior lui t_0. Dacă g este cunoscut și u se poate determina ușor, atunci, fără a rezolva ecuația (A.1.5), putem ști anumite mărginiri pentru soluția sa exprimate cu ajutorul soluției lui (A.1.6). În particular, aceste mărginiri servesc la demonstrarea unor teoreme de stabilitate.

Au fost demonstrate teoreme de comparație și pentru ecuații mai generale decît cele de mai sus. Ele stabilesc existența în domeniul Ω a unei inegalități între două funcții care satisfac a) anumite condiții pe $\partial\Omega$ și b) anumite inegalități operatoriale în Ω. Condiția a) generalizează con-

diția 1) iar b) condiția 2) din teorema (A.1.4). Demonstrarea acestor teoreme de comparație se face, așa cum s-a mai spus, prin substituiri convenabile și aplicarea unui principiu de maxim corespunzător.

Astfel, în unele demonstrații ale lemelor de care a fost vorba, la sfîrșitul secțiunii precedente, funcția cunoscută satisfăcea o problemă de tipul

$$Lf < 0 \text{ în } \Omega, \quad Bf < 0 \text{ pe } \partial\Omega$$

iar soluția ecuației lui Prandtl problema

$$L\varphi = 0 \text{ în } \Omega, \quad B\varphi = 0 \text{ pe } \partial\Omega.$$

Se definea atunci $u = \varphi - f$ sau $u = (\varphi - f)\,e^{-\alpha}$ și rezulta pentru u o problemă pentru care se putea aplica principiul de maxim, de unde rezulta, printre altele, că $\varphi < f$, de exemplu.

Dintre teoremele de comparație pe care se bazează analiza calitativă a soluțiilor ecuațiilor lui Prandtl indicăm doar pe una din ele [123], [228], pentru rest trimitem la lucrările citate în text.

LEMĂ (Nagumo-Westphal). *Fie operatorul lui Prandtl*

$$Pu \equiv u\frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial x} - \nu u_{\eta}\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \eta}\right)^2\right], \quad \text{unde } u(\xi, \eta) \in C(\bar{\Omega}), \quad \Omega = \{0 \leqslant \xi \leqslant L,\ 0 < \eta < 1\}.$$

Dacă

$$Pu < Pw \text{ în } \Omega,$$

$$u < w \text{ pe } \partial\Omega$$

iar următoarele derivate există: $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}, \frac{\partial w}{\partial \xi}, \frac{\partial w}{\partial \eta}, \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2}$ *și* $\nu > 0$, $\frac{\partial p}{\partial x}$ *este o funcție continuă dată, atunci* $u < w$ *în* Ω.

Anexa 2. Ecuațiile mișcării medii incompresibile cu fluctuații în coordonate ortogonale curbilinii

În particular, pentru $\rho = \text{const.}$, $\nu = \text{const.}$, $p = P + p'$ $V_i = V_i + v_i'$ din §4.4 obținem ecuațiile de mișcare sub forma

$$\frac{\partial V_1}{\partial t} + \frac{V_1}{H_1}\frac{\partial V_1}{\partial q_1} + \frac{V_2}{H_2}\frac{\partial V_1}{\partial q_2} + \frac{V_3}{H_3}\frac{\partial V_1}{\partial q_3} + \frac{V_2 V_1}{H_1 H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} + \frac{V_3 V_1}{H_1 H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3} -$$

$$- \frac{V_2^2}{H_1 H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} - \frac{V_3^2}{H_3 H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} + \overline{\frac{v_1'}{H_1}\frac{\partial v_1'}{\partial q_1}} + \overline{\frac{v_2'}{H_2}\frac{\partial v_1'}{\partial q_2}} + \overline{\frac{v_3'}{H_3}\frac{\partial v_1'}{\partial q_3}} +$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\frac{\overline{v_2'v_1'}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{\overline{v_3'v_1'}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{\overline{v_2'^2}}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-\frac{\overline{v_3'^2}}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{H_1}\frac{\partial P}{\partial q_1}=$$

$$=\frac{\nu}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}\frac{\partial V_1}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}\frac{\partial V_1}{\partial q_2}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}\frac{\partial V_1}{\partial q_3}\right)+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}\frac{\partial V_2}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}V_2\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}\frac{\partial V_3}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}V_3\right)\right]-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}\frac{\partial V_2}{\partial q_2}+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}V_2\right)-\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}\frac{\partial V_3}{\partial q_3}+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}V_3\right)\right]+$$

$$+H_1H_2H_3\left[-\frac{V_1}{H_1^2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)^2-\frac{V_1}{H_1^2}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right)^2-\frac{V_1}{H_2^2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)^2-\right.$$

$$-\frac{V_1}{H_3^2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right)^2+\frac{V_2}{H_1^2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)-\frac{V_2}{H_2^2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)-$$

$$-\frac{V_2}{H_3^2}\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}+\frac{V_3}{H_1^2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right)-\frac{V_3}{H_2^2}\frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-$$

$$\left.\left.-\frac{V_3}{H_3^2}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right)\right]\right\},$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t}+\frac{V_1}{H_1}\frac{\partial V_2}{\partial q_1}+\frac{V_2}{H_2}\frac{\partial V_2}{\partial q_2}+\frac{V_3}{H_3}\frac{\partial V_2}{\partial q_3}+\frac{V_2V_1}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\frac{V_2V_3}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}-$$

$$-\frac{V_1^2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{V_3^2}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}+\frac{\overline{v_1'\frac{\partial v_2'}{\partial q_1}}}{H_1}+\frac{\overline{v_2'\frac{\partial v_2'}{\partial q_2}}}{H_2}+\frac{\overline{v_3'\frac{\partial v_2'}{\partial q_3}}}{H_3}+\frac{\overline{v_2'v_1'}}{H_2H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+$$

$$+\frac{\overline{v_2'v_3'}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}-\frac{\overline{v_1'^2}}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{\overline{v_3'^2}}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{H_2}\frac{\partial P}{\partial q_2}=$$

$$=\frac{\nu}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}\frac{\partial V_2}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}\frac{\partial V_2}{\partial q_2}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}\frac{\partial V_2}{\partial q_3}\right)-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}\frac{\partial V_1}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}V_1\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}\frac{\partial V_1}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}V_1\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}\frac{\partial V_3}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}V_3\right)\right]-\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}\frac{\partial V_3}{\partial q_3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}V_3\right)\right]+H_1H_2H_3\left[-\frac{V_1}{H_1^2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)-\right.$$

$$-\frac{V_2}{H_1^2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\right)^2-\frac{V_3}{H_1^2}\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}+\frac{V_1}{H_2^2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)-$$

$$-\frac{V_2}{H_2^2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\right)^2-\frac{V_2}{H_2^2}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right)^2+\frac{V_3}{H_2^2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right)-$$

$$\left.-\frac{V_1}{H_3^2}\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-\frac{V_2}{H_3^2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right)^2-\frac{V_3}{H_3^2}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right)\right]\Bigg\},$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t}+\frac{V_1}{H_1}\frac{\partial V_3}{\partial q_1}+\frac{V_2}{H_2}\frac{\partial V_3}{\partial q_2}+\frac{V_3}{H_3}\frac{\partial V_3}{\partial q_3}+\frac{V_3V_1}{H_3H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}+\frac{V_3V_2}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-$$

$$-\frac{V_1^2}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{V_2^2}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}+\frac{\overline{v_1'}\,\overline{\partial v_3'}}{H_1\partial q_1}+\frac{\overline{v_2'}\,\overline{\partial v_3'}}{H_2\partial q_2}+\frac{\overline{v_3'}\,\overline{\partial v_3'}}{H_3\partial q_3}+\frac{\overline{v_3'v_1'}}{H_3H_1}$$

$$\frac{\partial H_3}{\partial q_1}+\frac{\overline{v_3'v_2'}}{H_3H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}-\frac{\widetilde{v_1'^2}}{H_1H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{\widetilde{v_2'^2}}{H_2H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{H_3}\frac{\partial P}{\partial q_3}=$$

$$=\frac{\nu}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}\frac{\partial V_3}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}\frac{\partial V_3}{\partial q_2}\right)+\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}\frac{\partial V_3}{\partial q_3}\right)-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}\frac{\partial V_1}{\partial q_1}+\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}V_1\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}\frac{\partial V_1}{\partial q_3}+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}V_1\right)\right]-$$

$$-\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}\frac{\partial H_2}{\partial q_2}+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_2^2}V_2\right)\right]+\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}\frac{\partial V_2}{\partial q_3}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3^2}V_2\right)\right]+H_1H_2H_3\left[-\frac{V_1}{H_1^2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right)-\right.$$

Scanned with OKEN Scanner

$$-\frac{V_2}{H_1^2}\frac{1}{H_2H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\frac{V_3}{H_1^2}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\right)^2-\frac{V_1}{H_2^2}\frac{1}{H_1H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}-$$

$$-\frac{V_2}{H_2^2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right)-\frac{V_3}{H_2^2}\left(\frac{1}{H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_3}\right)^2+\frac{V_1}{H_3^2}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right)+$$

$$+\frac{V_2}{H_3^2}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right)-\frac{V_3}{H_3^2}\left(\frac{1}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}\right)^2-\frac{V_3}{H_3^2}\left(\frac{1}{H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_2}\right)^2\Bigg]\Bigg\}.$$

Ecuația de continuitate devine

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_1}V_1\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_2}V_2\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3}V_3\right)=0$$

iar ecuațiile de mișcare se scriu (cu însumare după indicii care se repetă) sub următoarea formă compactă

$$\frac{\partial V_1}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(V_kV_1\frac{H_1H_2H_3}{H_k}\right)+\frac{V_1V_k}{H_1H_k}\frac{\partial H_1}{\partial q_k}-\frac{1}{H_1}\frac{V_k^2}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_1}+$$

$$+\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\overline{v_k'v_1'}\frac{H_1H_2H_3}{H_k}\right)+\frac{\overline{v_1'v_k'}}{H_1H_k}\frac{\partial H_1}{\partial q_k}-\frac{\overline{v_k'^2}}{H_1H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_1}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{H_1}\frac{\partial P}{\partial q_1}=$$

$$=\frac{\nu}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_k}T_{1k}\right)+H_j\left(T_{1k}\frac{\partial H_1}{\partial q_k}-T_{kk}\frac{\partial H_k}{\partial q_1}\right)(1-\delta_{jk}(1-\delta_{1j})\right\}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(V_kV_2\frac{H_1H_2H_3}{H_k}\right)+\frac{V_2V_k}{H_2H_k}\frac{\partial H_2}{\partial q_k}-\frac{1}{H_2}\frac{V_k^2}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_2}+$$

$$+\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\overline{v_k'v_2'}\frac{H_1H_2H_3}{H_k}\right)+\frac{\overline{v_2'v_k'}}{H_2H_k}\frac{\partial H_2}{\partial q_k}-\frac{\overline{v_k'^2}}{H_2H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_2}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{H_2}\frac{\partial P}{\partial q_2}=$$

$$=\frac{\nu}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_k}T_{2k}\right)+H_j\left(T_{2k}\frac{\partial H_2}{\partial q_k}-T_{kk}\frac{\partial H_k}{\partial q_2}\right)(1-\delta_{jk})(1-\delta_{2j})\right\}$$

$$\frac{\partial V_3}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(V_kV_3\frac{H_1H_2H_3}{H_k}\right)+\frac{V_3V_k}{H_3H_k}\frac{\partial H_3}{\partial q_k}-\frac{1}{H_3}\frac{V_k^2}{H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_3}+$$

$$+\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\overline{v_k'v_3'}\frac{H_1H_2H_3}{H_k}\right)+\frac{\overline{v_3'v_k'}}{H_3H_k}\frac{\partial H_3}{\partial q_k}-\frac{\overline{v_k'^2}}{H_3H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_3}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{H_3}\frac{\partial P}{\partial q_3}=$$

$$=\frac{\nu}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_k}T_{3k}\right)+H_j\left(T_{3k}\frac{\partial H_3}{\partial q_k}-T_{kk}\frac{\partial H_k}{\partial q_3}\right)(1-\delta_{jk})(1-\delta_{3j})\right.$$

Scanned with OKEN Scanner

unde

$$T_{11} = 2\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{V_1}{H_1}\right) + \frac{1}{H_1}(\vec{V}\nabla_q)\,H_1\right];\quad T_{12} = \frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{V_2}{H_2}\right) + \\ + \frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{V_1}{H_1}\right);$$

$$T_{22} = 2\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{V_2}{H_2}\right) + \frac{1}{H_2}(\vec{V}\nabla_q)\,H_2\right];\quad T_{13} = \frac{H_1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{V_1}{H_1}\right) + \\ + \frac{H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{V_3}{H_3}\right);$$

$$T_{33} = q\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{V_3}{H_3}\right) + \frac{1}{H_3}(\vec{V}\nabla_q)\,H_3\right];\quad T_{23} = \frac{H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{V_3}{H_3}\right) + \\ + \frac{H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{V_2}{H_2}\right).$$

$$\nabla_q = \frac{1}{H_i}\frac{\partial}{\partial q}.$$

Pentru a obține ecuația corelațiilor $v_i' v_j'$ vom proceda ca și în cazul ecuațiilor scrise în coordonate carteziene. Astfel avem ecuația mărimilor instantanee v_i'.

$$\frac{\partial v_1'}{\partial t} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left[(V_k v_1' + v_k' V_1 + v_k' v_1' - \overline{v_k' v_1'})\frac{H_1H_2H_3}{H_k}\right] + \\ + \frac{V_1 v_k' + v_1' V_k + v_1' v_k' - \overline{v_1' v_k'}}{H_1H_k}\frac{\partial H_1}{\partial q_k} - \frac{2V_k v_k' + v_k'^2 - \overline{v_k'^2}}{H_1H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_1} + \frac{1}{\rho}\frac{1}{H_1}\frac{\partial p'}{\partial q_1} = \\ = \frac{\nu}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_k}t_{1k}'\right) + H_j\left(t_{1k}'\frac{\partial H_1}{\partial q_k} - t_{kk}'\frac{\partial H_k}{\partial q_1}\right)(1-\delta_{jk})(1-\delta_{1j})\right\},$$

$$\frac{\partial v_2'}{\partial t} + \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left[(V_k v_2' + v_k' V_2 + v_k' v_2' - \overline{v_k' v_2'})\frac{H_1H_2H_3}{H_k}\right] + \\ + \frac{V_2 v_k' + v_2' V_k + v_2' v_k' - \overline{v_2' v_k'}}{H_2H_k}\frac{\partial H_2}{\partial q_k} - \frac{2V_k v_k' + v_k'^2 - \overline{v_k'^2}}{H_2H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_2} + \frac{1}{\rho}\frac{1}{H_2}\frac{\partial p'}{\partial q_2} = \\ = \frac{\nu}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_k}t_{2k}'\right) + H_j\left(t_{2k}'\frac{\partial H_2}{\partial q_k} - t_{kk}'\frac{\partial H_k}{\partial q_2}\right)(1-\delta_{jk})(1-\delta_{2j})\right\},$$

$$\frac{\partial v_3'}{\partial t}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left[(V_kv_3'+v_k'V_3+v_k'v_3'-\widetilde{v_k'v_3'})\frac{H_1H_2H_3}{H_k}\right]+$$

$$+\frac{V_3v_k'+v_3'V_k+v_3'v_k'-\widetilde{v_3'v_k'}}{H_3H_k}\frac{\partial H_3}{\partial q_k}-\frac{2V_kv_k'+v_k'^2-\widetilde{v_k'^2}}{H_3H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_3}+\frac{1}{\rho}\frac{1}{H_3}\frac{\partial p'}{\partial q_3}=$$

$$=\frac{\nu}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_k}t_{3k}'\right)+H_j\left(t_{3k}'\frac{\partial H_3}{\partial q_k}-t_{kk}'\frac{\partial H_k}{\partial q_3}\right)(1-\delta_{jk})(1-\delta_{2j})\right\},$$

ecuația continuității fiind

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_1}v_1'\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_2}v_2'\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_3}v_3'\right)=0.$$

Expresiile fluctuațiilor tensiunii sînt

$$t_{11}'=2\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v_1'}{H_1}\right)+\frac{1}{H_1}(\vec{V}'\nabla_q)H_1\right];\quad t_{12}'=\frac{H_2}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v_2'}{H_2}\right)+$$

$$+\frac{H_1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{v_1'}{H_1}\right);$$

$$t_{22}'=2\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{v_2'}{H_2}\right)+\frac{1}{H_2}(\vec{V}'\nabla_q)H_2\right];\quad t_{13}'=\frac{H_1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{v_1'}{H_1}\right)+$$

$$+\frac{H_3}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v_3'}{H_3}\right);$$

$$t_{33}'=2\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{v_3'}{H_3}\right)+\frac{1}{H_3}(\vec{V}'\nabla_q)H_3\right];\quad t_{23}'=\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{v_2'}{H_2}\right)+$$

$$+\frac{H_3}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{v_3'}{H_3}\right).$$

Ca și în §4.4, ecuația mărimii $\widetilde{v_1'^2}$ se găsește a fi

$$\frac{\partial}{\partial t}(\widetilde{v_1'^2})+\frac{V_k}{H_k}\frac{\partial}{\partial q_k}(\widetilde{v_1'^2})+\frac{2}{H_k}\frac{\partial V_1}{\partial q_k}\widetilde{v_1'v_k'}+\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\widetilde{v_1'^2v_k'}\frac{H_1H_2H_3}{H_k}\right)+$$

$$+2\frac{V_1\widetilde{v_1'v_k'}+V_k\widetilde{v_1'^2}+\widetilde{v_1'^2v_k'}}{H_1H_k}\frac{\partial H_1}{\partial q_k}-2\frac{2V_k\widetilde{v_1'v_k'}+\widetilde{v_1'v_k'^2}}{H_1H_k}\frac{\partial H_k}{\partial q_1}+\frac{2}{\rho}\frac{1}{H_1}v_1'\frac{\partial p'}{\partial q_1}=$$

$$=\frac{\nu}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_k^2}\frac{\partial}{\partial q_k}(\widetilde{v_1'^2})\right]-\frac{2\nu}{H_k^2}\left(\frac{\partial v_1'}{\partial q_k}\right)^2+$$

Scanned with OKEN Scanner

$$+\frac{2\nu}{H_1H_2H_3}H_1\frac{\partial}{\partial q_k}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_k^2}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{H_1}\right)\right]\times\overline{v_1'^2}+$$

$$+\frac{\nu}{H_1}\frac{1}{H_k^2}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{H_1}\right)\frac{\partial}{\partial q_k}(\overline{v_1'^2}H_1)+2\nu\overline{v_1'\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v_k'}{H_k}\right)}\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{1}{H_1}\right)-$$

$$-2\nu\frac{\overline{v_1'v_k'}}{H_1H_k}\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_k}(H_1H_2H_3)\right]+$$

$$+\frac{4}{H_1H_2H_3}\overline{v'\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{H_1H_2H_3}{H_1^2}(\vec{V}'\nabla)H_1\right]}+\nu\frac{H_1}{H_3^2}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left[\overline{\left(\frac{v_1'}{H_1}\right)^2}\right]+$$

$$+2\nu\overline{\frac{v_1'}{H_1^2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v_3'}{H_3}\right)}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}+2\nu\overline{\frac{v_1'}{H_1^2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v_2'^2}{H_2}\right)}\times\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+$$

$$+2\nu\frac{v_1'}{H_2^2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{v_1'}{H_1}\right)\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-4\nu\overline{\frac{v_1'}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{v_3'}{H_3}\right)H_2}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}-$$

$$-4\nu\overline{\frac{v_1'}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{v_2'}{H_2}\right)H_3}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}-4\nu\overline{\frac{v_1'}{H_1H_2H_3}(\vec{V}'\nabla)H_3}\frac{H_2}{H_3}\frac{\partial H_3}{\partial q_1}-$$

$$-4\nu\overline{\frac{v_1'}{H_1H_2H_3}(\vec{V}'\nabla)H_2}\frac{H_3}{H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1},$$

ecuații analoage putînd fi obținute pentru : $\widetilde{v_2'^2}$, $\widetilde{v_3'^2}$, $\widetilde{v_1'v_2'}$, $\widetilde{v_1'v_3'}$, $\widetilde{v_2'v_3'}$. Procedeul de obținere a lor poate fi schematizat astfel : fie ecuația mărimii instantanee v_i' scrisă ca $E(v_i')=0$. Atunci cele șase ecuații $(1-\delta_{ij})\,v_j'E(v_i')+v_i'E(v_j')=0$, $i,j=1,2,3$, $i\neq j$ furnizează componentele tensorului $\overline{v_i'v_j'}$. Se folosesc, de asemenea, relațiile

$$A\Delta_q B+B\Delta_q A=\Delta_q(AB)-2\frac{H_1H_2H_3}{H_k^2}\frac{\partial A}{\partial q_k}\cdot\frac{\partial B}{\partial q_k},$$

$$\Delta_q=\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_k^2}\frac{\partial}{\partial q_k}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial q_k}\left(\frac{H_1H_2H_3}{H_k}v_k'\right)=0.$$

Anexa 3. Integrale uzuale

Integralele utilizate în calculul coeficienților ecuației diferențiale în ψ_δ sînt combinații liniare ale integralelor

$$\int_0^1\sqrt{\frac{\eta}{2-\eta}}\,d\eta,\ \int_0^1\sqrt{\eta^2(2-\eta)}\,d\eta,\ \int_0^1\eta\sqrt{\frac{\eta}{2-\eta}}\,d\eta,\ \int_0^1\eta^2\sqrt{\frac{\eta}{2-\eta}}\,d\eta.$$

Aceste integrale se calculează folosind substituţia : $\frac{2}{\eta} - 1 = z^2$ iar limitele de integrare $\eta = 0$ şi $\eta = 1$ devin respectiv $z = \infty$ şi $z = 1$. Cu aceasta avem

$$\sqrt{\frac{\eta}{2-\eta}}\,d\eta = -\frac{4}{(1+z^2)^2}\,dz,\ \sqrt{\eta^3(2-\eta)}\,d\eta = -$$

$$-\frac{16}{(1+z^2)^4}\,dz,\ \sqrt{\eta^2\frac{\eta}{2-\eta}}\,d\eta = -$$

$$-\frac{8}{(1+z^2)^3}\,dz,\ \eta^2\sqrt{\frac{\eta}{2-\eta}}\,d\eta = -\frac{16}{(1+z^2)^4}\,dz.$$

Notînd $I_n = \int_\infty^1 \frac{dz}{(1+z^2)^n}$, se obţine formula de recurenţă

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n}\cdot\frac{z}{(1+z^2)^n}\Big|_\infty^1 + \frac{2n-1}{2n}I_n,\quad n \geqslant 1$$

$$I_1 = \int_\infty^1 \frac{dz}{1+z^2} = \operatorname{arctg} z\Big|_\infty^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{\eta}{2-\eta}}\,d\eta = -4\int_\infty^1 \frac{dz}{(1+z^2)^2} = -4\ I_2 = -$$

$$-4\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}I_1\right) = -4\left(\frac{1}{4} - \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Calculînd în mod asemănător se obţine

$$\int_0^1 \sqrt{\eta^3(2-\eta)}\,d\eta = -16\int_\infty^1 \frac{z^2}{(1+z^2)^4}\,dz = -$$

$$-16\left[\int_\infty^1 \frac{dz}{(1+z^2)^3} - \int_\infty^1 \frac{dz}{(1+z^2)^4}\right] = -\frac{1}{3} + \frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \sqrt{\eta^2\cdot\frac{\eta}{2-\eta}}\,d\eta = -8\int_\infty^1 \frac{dz}{(1+z^2)^3} = -8\left(\frac{1}{4} - \frac{3\pi}{32}\right) = -2 + \frac{3\pi}{4},$$

$$\int_0^1 \eta^2\sqrt{\frac{\eta}{2-\eta}}\,d\eta = -\int_\infty^1 \frac{16}{(1+z^2)^4}\,dz = -16\left(\frac{11}{48} - \frac{5\pi}{64}\right) = -\frac{11}{3} + \frac{5\pi}{4}.$$

Scanned with OKEN Scanner

Cînd limita superioară este η adică integrala este de forma $\int_0^{\eta} \sqrt{\frac{1}{\eta'(2-\eta')}}\,d\eta'$ se obține formula

$$\int_0^{\eta} \sqrt{\frac{1}{\eta'(2-\eta')}}\,d\eta' = \pi - 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{2-\eta}{\eta}} \equiv 2\arcsin\sqrt{\frac{\eta}{2}} \equiv \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\eta).$$

Anexa 4. Dezvoltări interioare și exterioare

Fie o ecuație diferențială de ordin n, în care parametrul mic ε intră drept coeficient al termenului de ordin n

$$\varepsilon D_u^n + f(D_u^{n-1},\ D_u^{n-2},\ D_u^{n-3},\ \ldots,\ u) = 0, \tag{A.4.1}$$

unde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D} \subset R^n$, $D^k = \dfrac{\partial^k}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, $\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = k$ $0 \leqslant \alpha_i \leqslant n$ $(i = 1, \ldots, n)$. Fie pentru $\varepsilon > 0$

$$\bar{u} = U_0(x) + \varepsilon U_1(x) + \varepsilon^2 U_2(x) + \ldots \tag{A.4.2}$$

Pentru $\varepsilon > 0$ mic, în anumite condiții, (A.4.2) este soluția asimptotică a ecuației (A.4.1); pentru $\varepsilon = 0$ ea nu este soluția lui (A.4.1), ci a unei ecuații de ordin inferior

$$f(D^{n-1}u, \ldots, u) = 0. \tag{A.4.1}'$$

Aceasta face ca anumite condiții la limită, pe care le verifica soluția u a lui (A.4.1), să nu mai fie satisfăcute de $U_0(x)$ și de dezvoltarea (A.4.2). Deci seria (A.4.2) poate constitui o soluție asimptotică a soluției lui (A.4.1), într-un subdomeniu al lui D care nu conține o fișie de lîngă frontiera ∂D a lui D. Dat fiind că seria (A.4.2) constituie o dezvoltare asimptotică în afara stratului limită, departe de corp, ea este numită dezvoltare exterioară.

Convergența soluției u a lui (A.4.1) către U_0 a lui (A.4.1)′ pentru $\varepsilon \to 0$ nu este uniformă în tot D și anume : $u \to U_0$ pentru $\varepsilon \to 0$ în D cu excepția unui strat de lîngă ∂D, unde u își schimbă foarte rapid ordinul pentru a restabili condiția la limită pierdută de soluția u prin trecerea de la ecuația (A.4.1) de ordinul n la (A.4.1)′ de ordinul $n-1$. De aceea, în stratul limită se introduc noi variabile $x' = g(x, \varepsilon)$ care dilată stratul limită. De exemplu, în teoria stratului limită al lui Prandtl ($n = 1$) se ia $x_2' = \eta = \dfrac{x_2}{\varepsilon} = \dfrac{y}{\varepsilon}$ (unde x_2, notat de obicei y, este coordonata normală pe corp). În acest strat se scrie seria formală, numită dezvoltare interioară

$$\bar{\bar{u}} = u_0(x') + \varepsilon u_1(x') + \ldots . \tag{A.4.3}$$

Noile funcții $U_0, U_1, \ldots, u_0, u_1, \ldots$ satisfac anumite ecuații obținute prin substituirea expresiilor (A.4.2) și (A.4.3) în (A.4.1). Condițiile

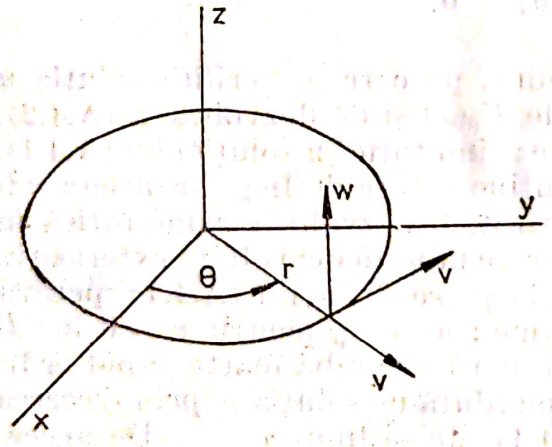
la limită pentru funcţiile din dezvoltarea exterioară nu sînt suficiente căci la perete s-au pierdut anumite condiţii la limită pe care le satisfăceau u. Condiţiile care lipsesc vor fi suplinite prin egalarea (matching) dezvoltării exterioare cu cea interioară, conform unui principiu de egalare. În teoria stratului limită al lui Prandtl se postulează următorul principiu : m termeni ai dezvoltării asimptotice a p termeni ai dezvoltării exterioare scrisă în coordonatele interioare x', se egalează cu p termeni ai dezvoltării asimptotice a m termeni ai dezvoltării interioare scrisă în coordonatele exterioare x [215], [216].

Anexa 5. Sisteme de coordonate ortogonale

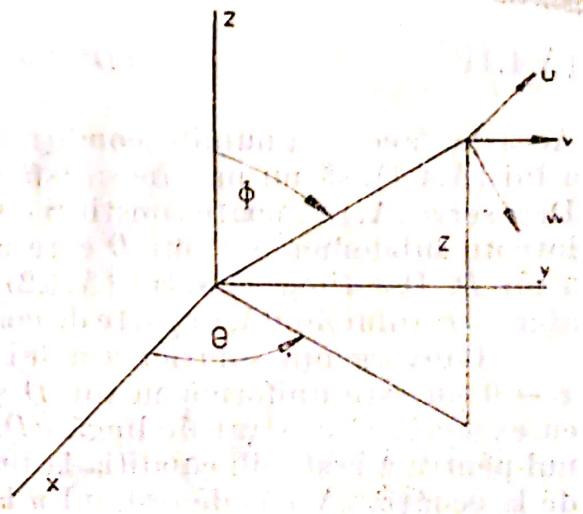
În capitolul I am evidenţiat importanţa alegerii sistemului de coordonate în teoria stratului limită ; aceasta creşte în cazul tridimensional şi al pereţilor curbi.

Dată fiind utilitatea lor pentru diferite configuraţii de curgere întîlnite în practică, dăm mai jos principalele sisteme de coordonate folosite în această teorie, liniile de coordonate şi coeficienţii lui Lamé corespunzători. În figurile A.5.1—A.5.4 sînt reprezentate componentele vitezei în sistemele de coordonate menţionate.

Să notăm cu (x, y, z) coordonatele carteziene şi H_1, H_2, H_3 coeficienţii lui Lamé. Fie r, θ, z coordonatele cilindrice ; avem $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$; $z = z$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = 1$. Liniile de coordonate sînt :



A.5.1

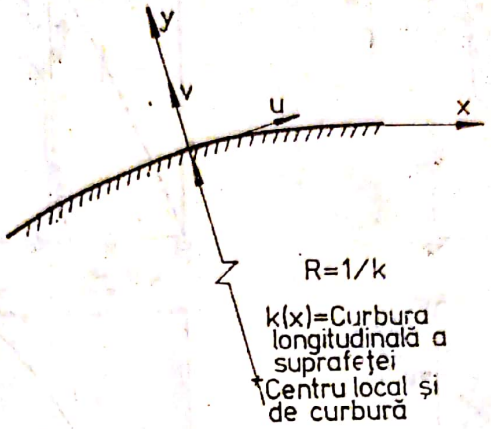


A.5.2

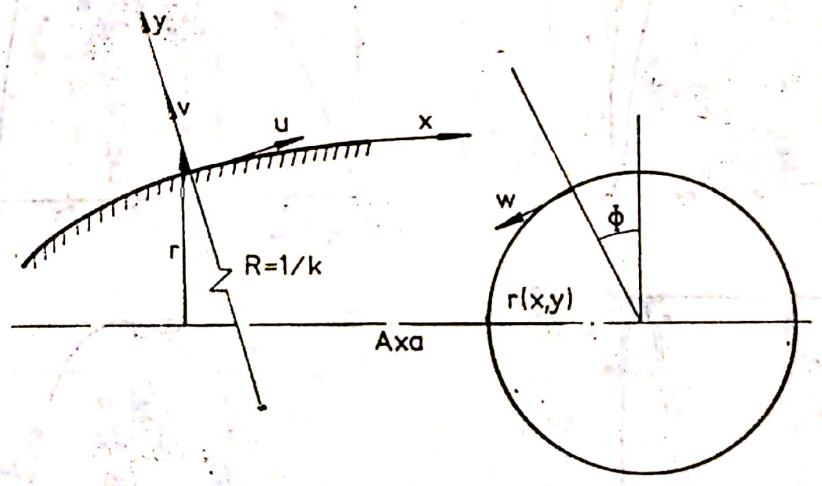
dreapta $\theta = \text{const.}$, $z = \text{const.}$; cercul $r = \text{const.}$, $z = \text{const.}$ şi cercul $\theta = \text{const.}$, $r = \text{const.}$ (fig. A.5.1). Fie r, Φ, θ coordonatele sferice ; avem $x = r\cos\theta\sin\Phi$, $y = r\sin\theta\sin\Phi$, $z = r\cos\Phi$, $H_1 = 1$, $H_2 = r$, $H_3 = r\sin\Phi$. Liniile de coordonate sînt : dreapta $\theta = \text{const.}$, $\Phi = \text{const.}$; cercul $r = \text{const.}$, $\Phi = \text{const.}$ şi cercul $r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ (fig. A.5.2).

Fie x, y, z coordonate locale pe suprafeţe cu curbură după o singură direcţie. Avem x pe suprafaţă, în lungul arcului, z pe suprafaţă, normală pe x şi y după normala locală la suprafaţă, $H_1 = 1 + ky$, $H_2 = 1$, $H_3 = 1$ ($R = k^{-1}$, $R =$ raza de curbură) (fig. A.5.3).

Fie x, y, z coordonate locale pe suprafețe curbe și cu axă de simetrie. Avem: x pe suprafață în lungul axei de simetrie z pe suprafață, normală pe x și y după normala locală la suprafață, $H = 1 + ky$, $H = 1$, $H = r$ ($R = k^{-1}$, R = raza de curbură longitudinală, r = raza de curbură transversală) (fig. A.5.4.).



A.5.3



A.5.4

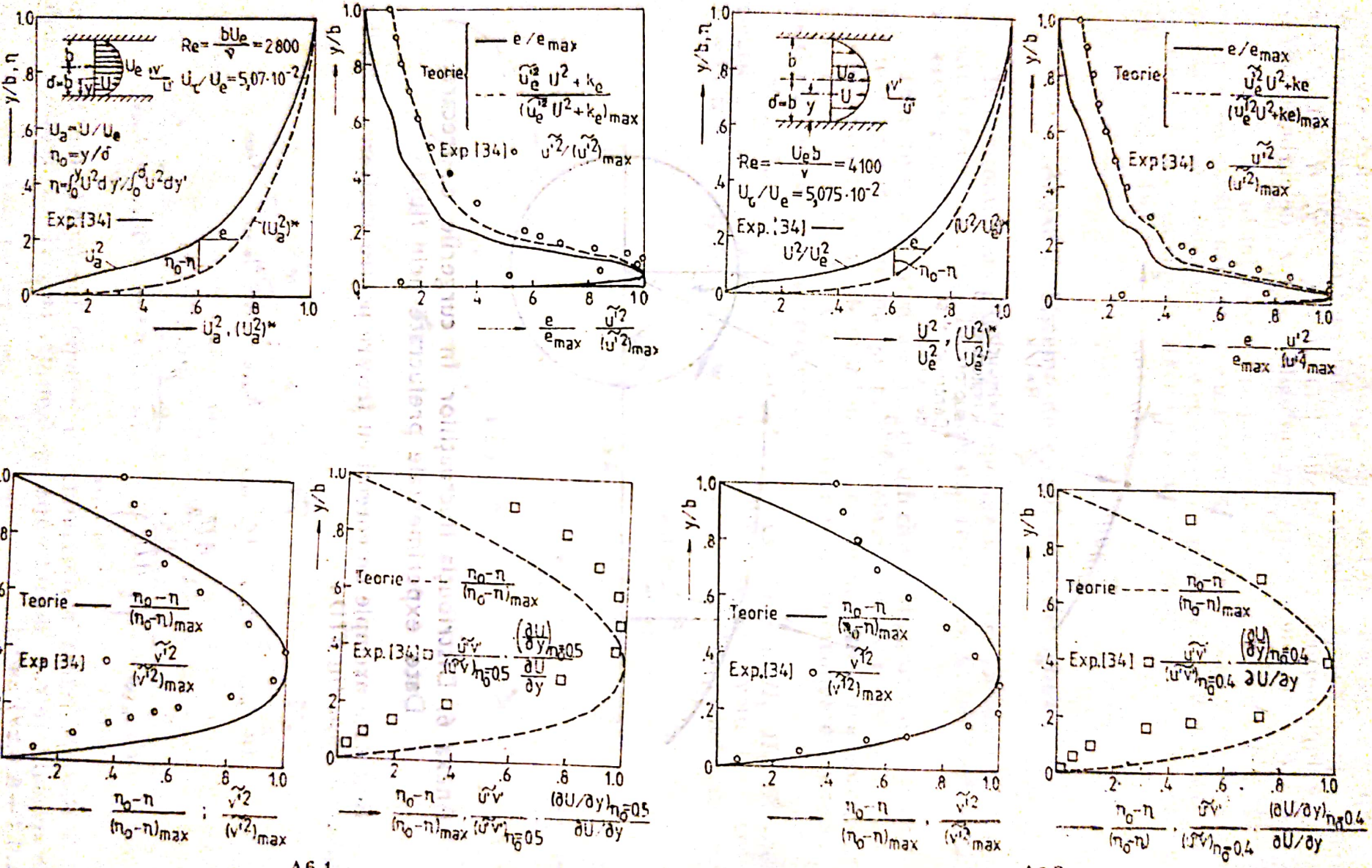
Anexa 6. Distribuția fluctuațiilor în curgerile cu frecare. Date experimentale prelucrate prin fluid

Sînt date exemple de curgeri cu frecare pentru ilustrarea relațiilor unitare deduse din FID:

$$\frac{\widetilde{u'^2}}{(\widetilde{u'^2})_{max}} \simeq \frac{e}{e_{max}}, \quad \frac{\widetilde{v'^2}}{(v'^2)_{max}} \simeq \frac{h}{h_{max}}; \quad \frac{\widetilde{w'^2}}{(\widetilde{w'^2})_{max}} \simeq \frac{e}{e_{max}}$$

$$\frac{\overline{u'v'}}{(\overline{u'v'})_{max}} \sim \frac{h \dfrac{dU_a}{d\eta_1}}{\left(h \dfrac{dU_a}{d\eta_0}\right)_{max}}, \quad \frac{\overline{u'^2_+ v'^2} + \widetilde{w'^2}}{(\widetilde{u'^2} + \widetilde{v'^2} + \widetilde{w'^2})_{max}} \sim \frac{e}{e_{max}}.$$

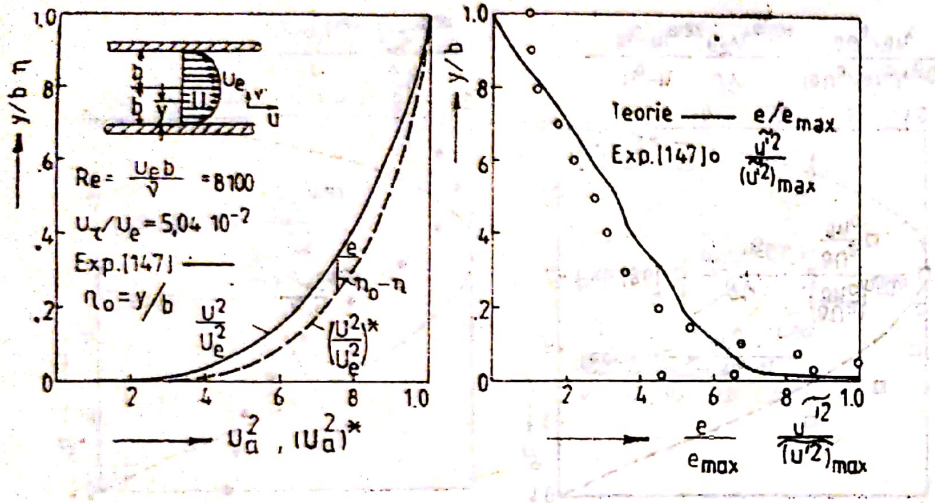
Sistematizarea materialului (în general incomplet) din literatura de specialitate este făcută după configurația curgerii cu frecare (figurile A.6.1—A.6.29) astfel:

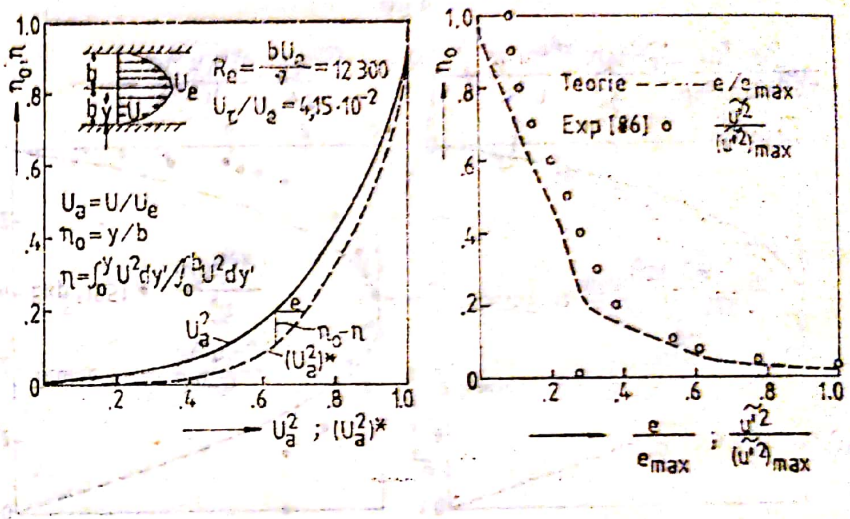


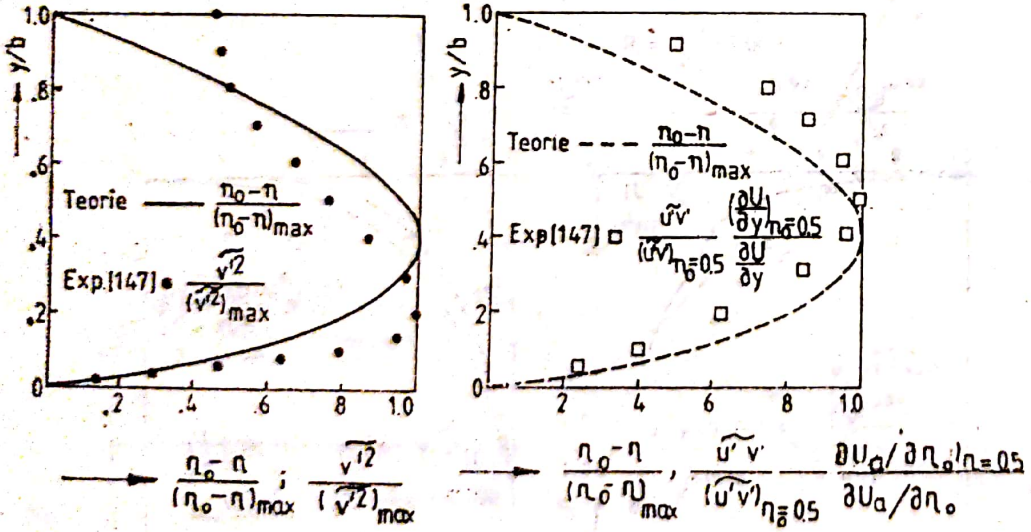
A6.1

A6.2

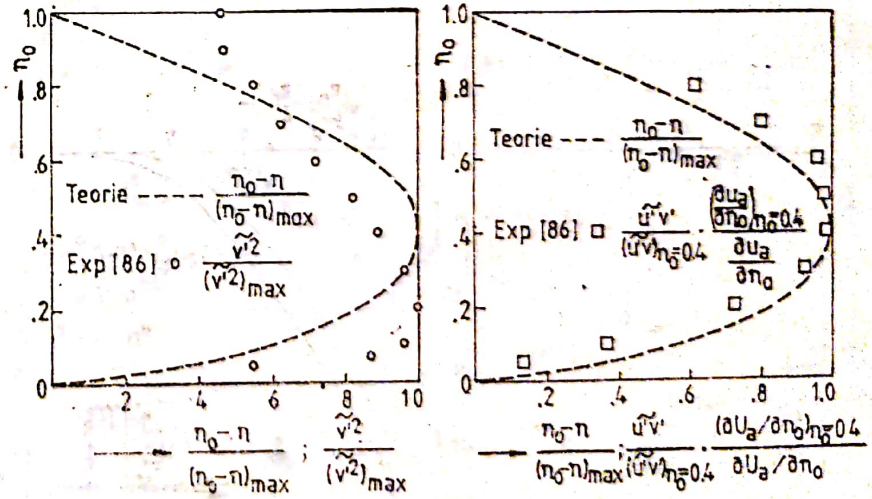
Scanned with OKEN Scanner





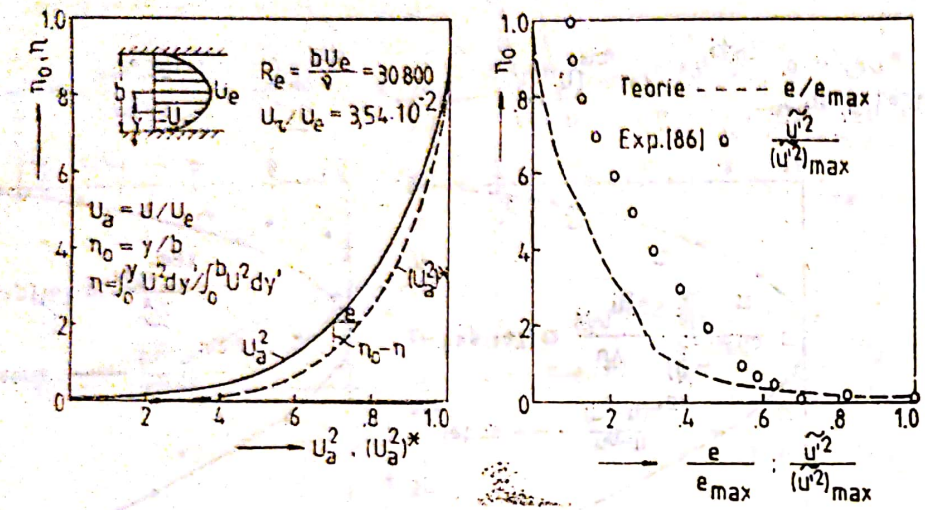


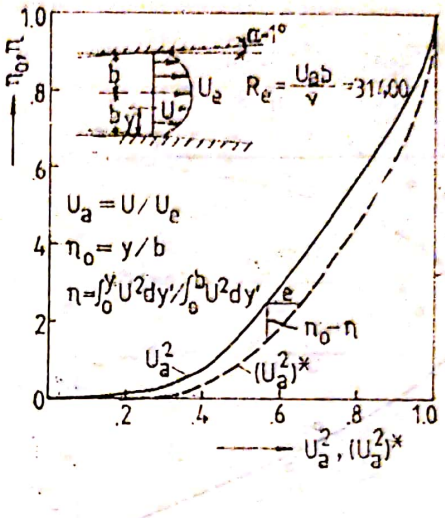
A 6.3

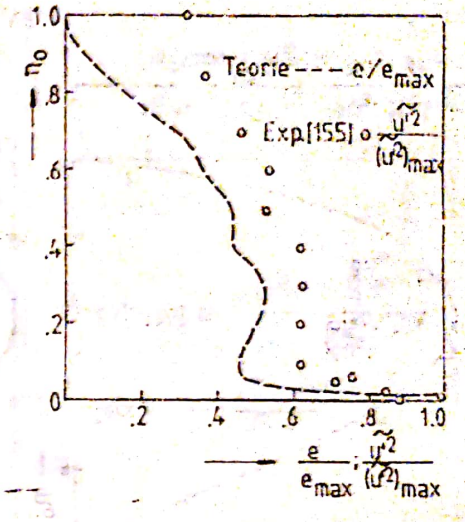


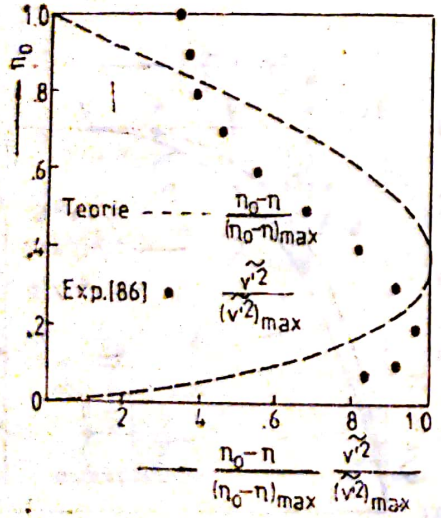
A6.4

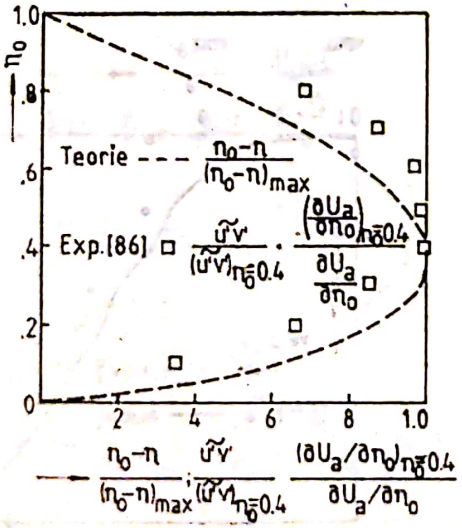
Scanned with OKEN Scanner



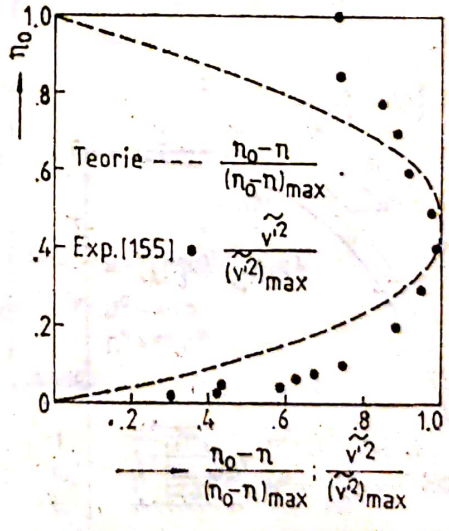


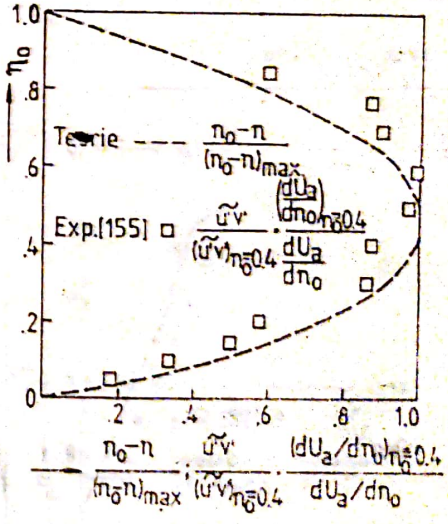






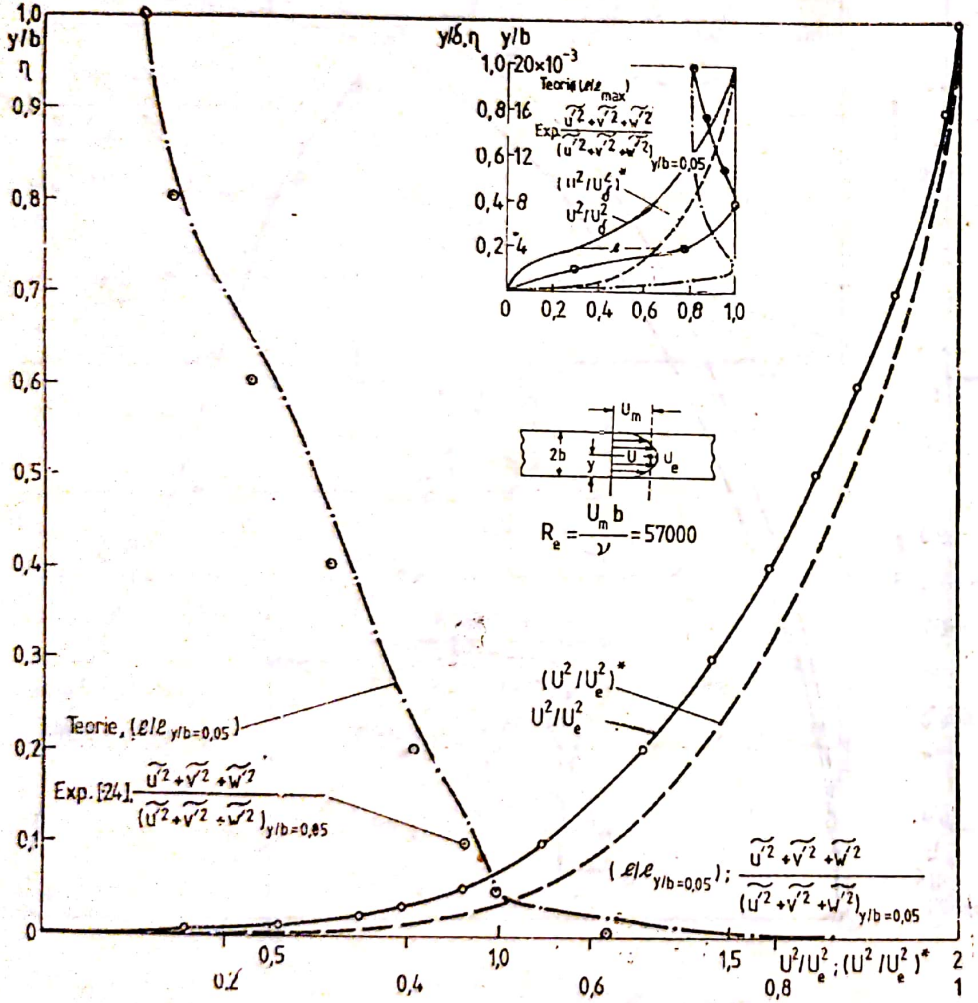
A6.5



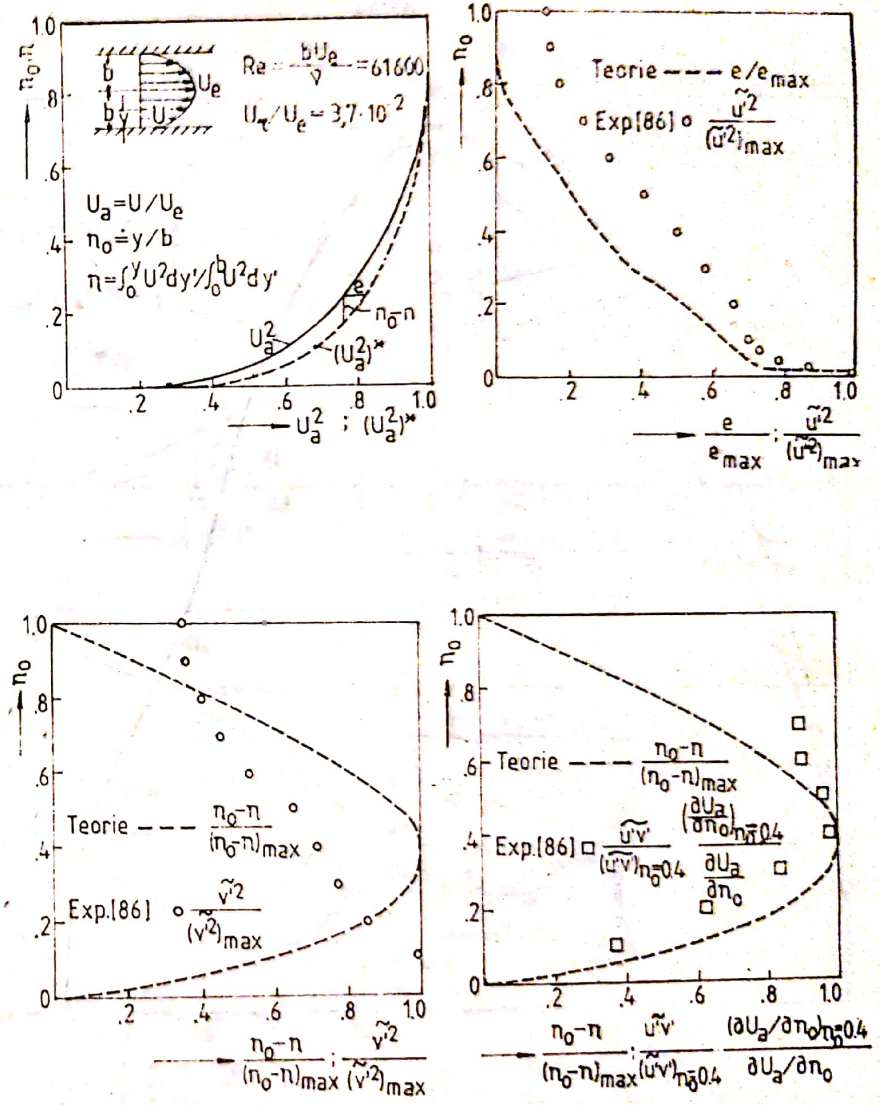


A6.6

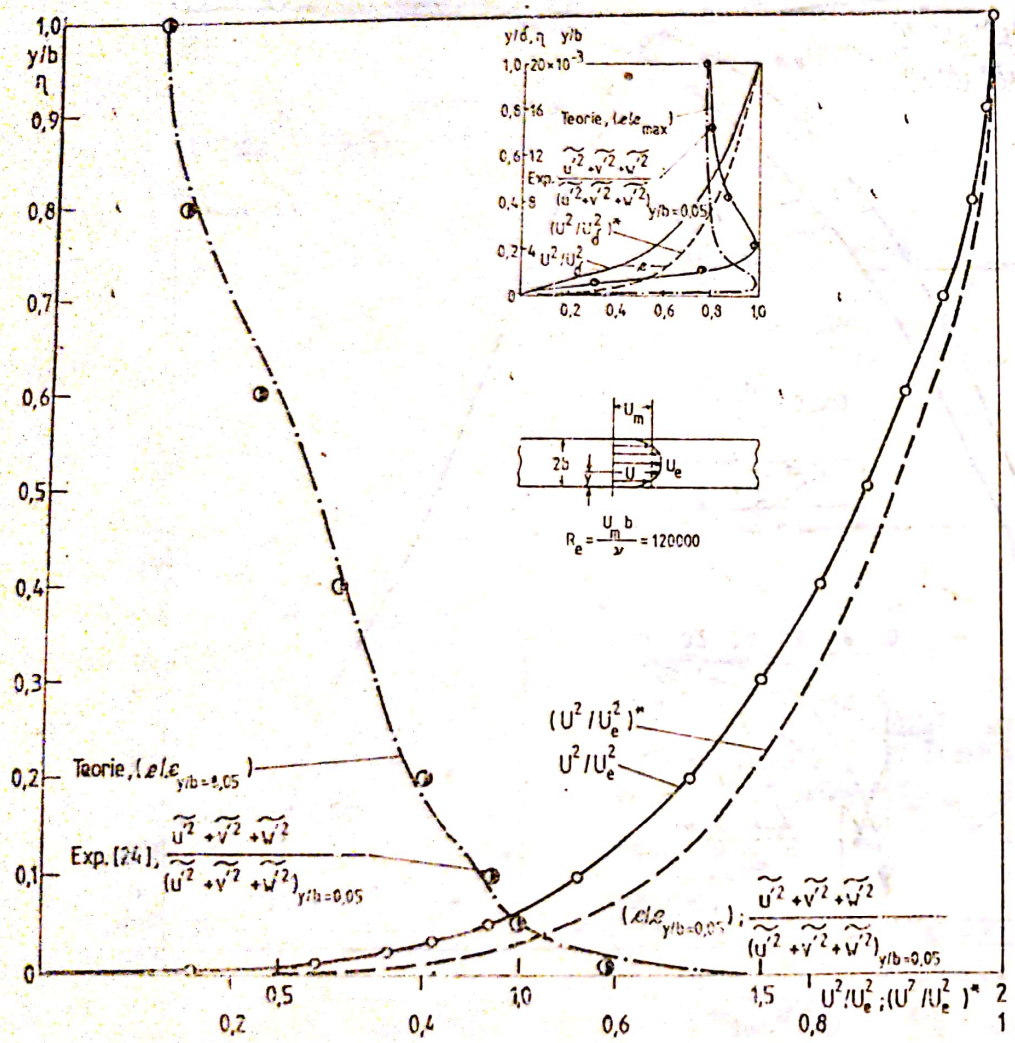
Scanned with OKEN Scanner


y/b
η
Teorie, (ε/ε y/b=0,05)
Exp. [24]
(U²/U_e²)*
U²/U_e²
U²/U_e² ; (U²/U_e²)*
y/δ, η
Teorie (ε/ε max)
y/b=0,05
U_m
2b
U_e
R_e = U_m b / ν = 57000

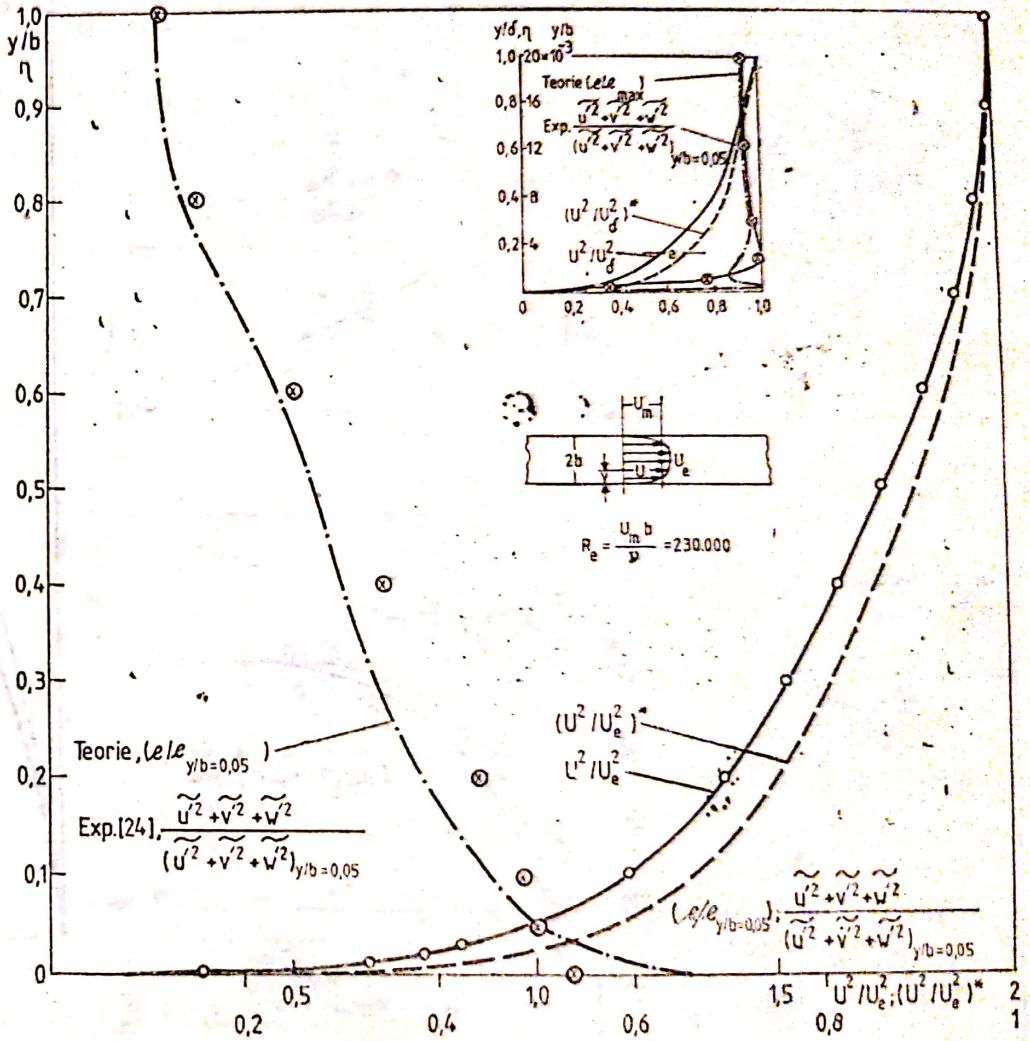
A6.7


Re = bU_e/ν = 61600
U_τ/U_e = 3,7·10⁻²
U_a = U/U_e
η_0 = y/b
η = ∫_0^y U²dy' / ∫_0^b U²dy'
Teorie --- e/e_max
Exp.[86] o
Teorie --- (η_0−η)/(η_0−η)_max
Exp.[86] o
Exp.[86] □

A6.8

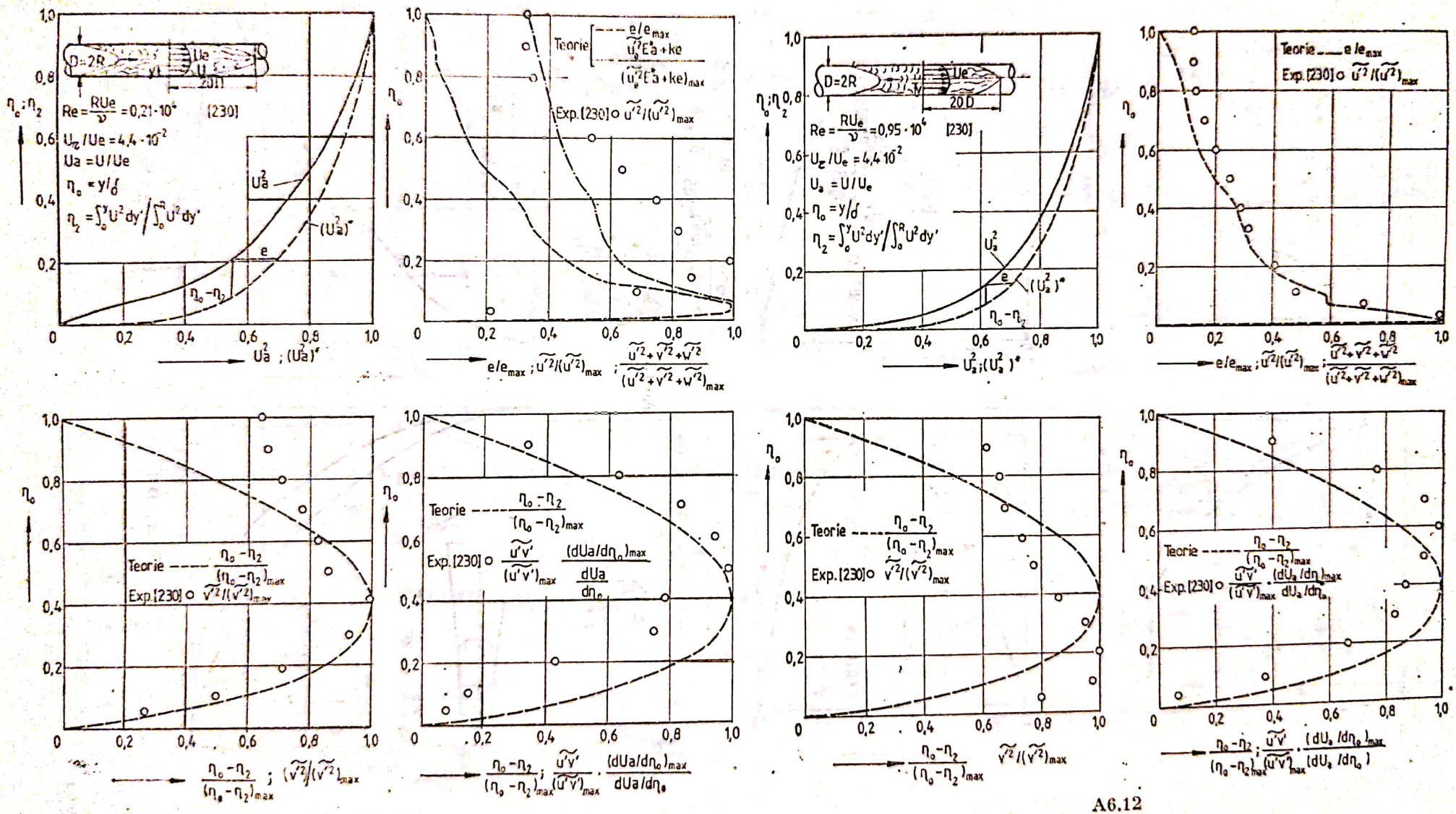


A6.9



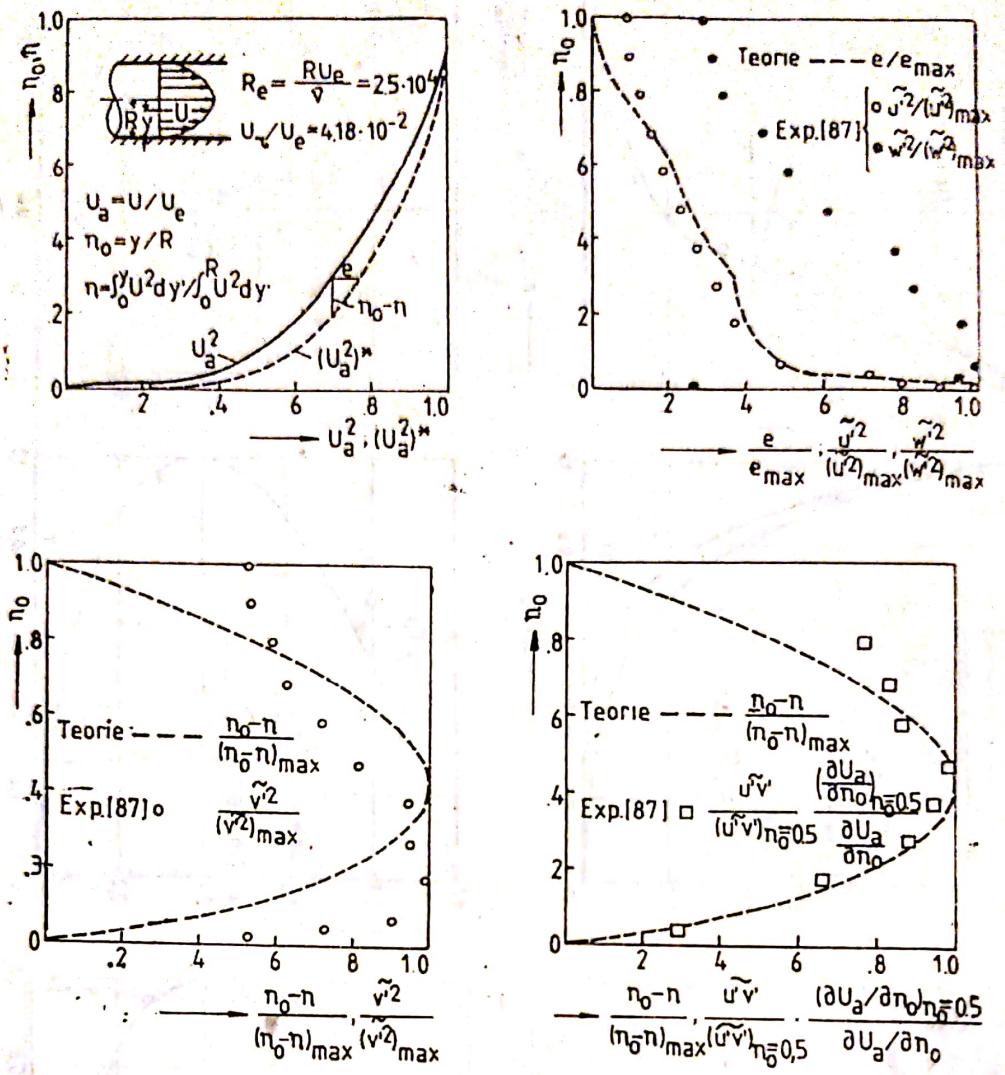
A6.10

Scanned with OKEN Scanner

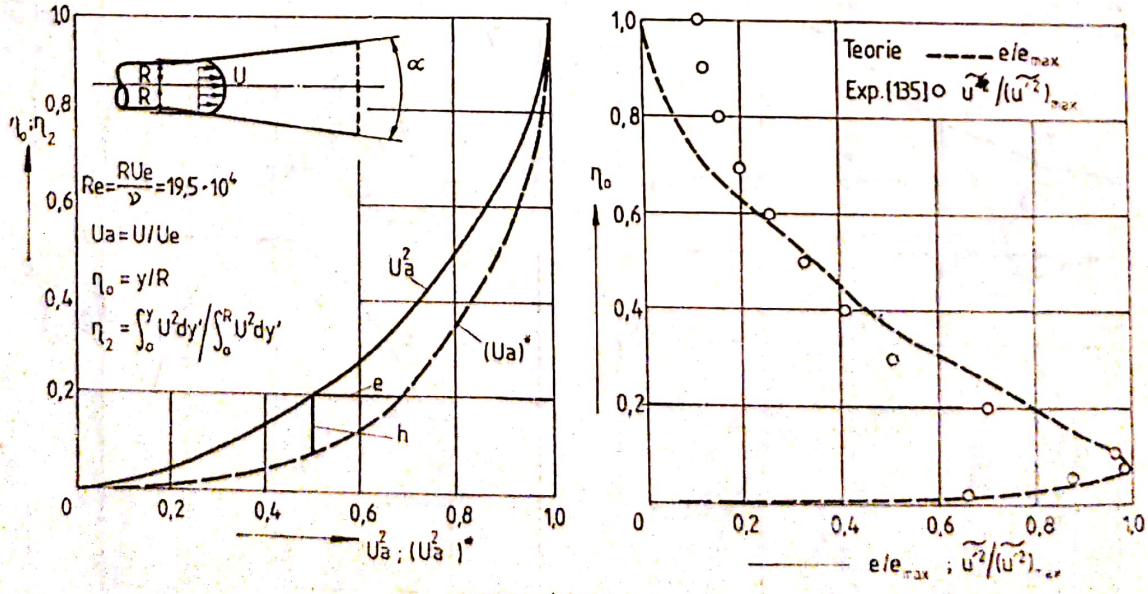

D=2R
Ue
20D
Re = RUe/ν = 0,21·10⁶ [230]
Re = RUe/ν = 0,95·10⁶ [230]
Uz/Ue = 4,4·10⁻²
Ua = U/Ue
η₀ = y/δ
η₂ = ∫₀ʸ U²dy' / ∫₀ᴿ U²dy'
Ua²
(Ua²)*
e
η₀ − η₂
Teorie
Exp. [230] ○
e/emax
u'²/(u'²)max
(u'²+v'²+w'²)/(u'²+v'²+w'²)max
v'²/(v'²)max
u'v'/(u'v')max
(dUa/dη₀)max / dUa/dη₀
(η₀ − η₂)/(η₀ − η₂)max

A6.11

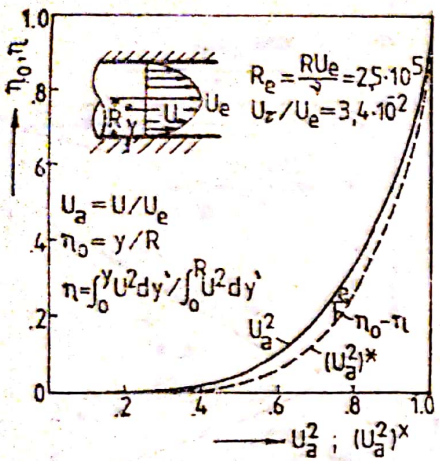
A6.12

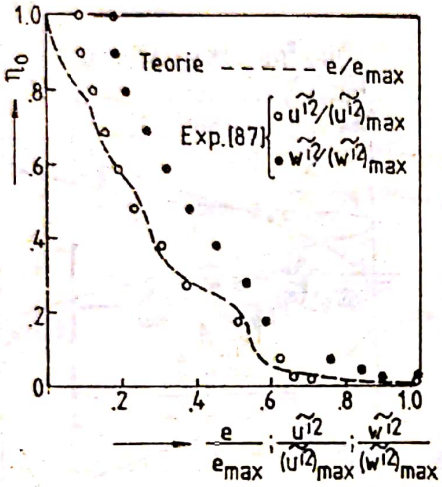

$R_e = \frac{RU_e}{\nu} = 2.5 \cdot 10^4$
$U_\tau / U_e = 4.18 \cdot 10^{-2}$
$U_a = U/U_e$
$\eta_0 = y/R$
$\eta = \int_0^y U^2 dy' / \int_0^R U^2 dy'$
U_a^2
$(U_a^2)^*$
$\eta_0 - \eta$
e
$U_a^2 ; (U_a^2)^*$
Teorie ---- e/e_{max}
Exp.[87] $\overline{u'^2}/(\overline{u'^2})_{max}$
$\overline{w'^2}/(\overline{w'^2})_{max}$
$\frac{e}{e_{max}} ; \frac{\overline{u'^2}}{(\overline{u'^2})_{max}} ; \frac{\overline{w'^2}}{(\overline{w'^2})_{max}}$
Teorie ---- $\frac{\eta_0 - \eta}{(\eta_0 - \eta)_{max}}$
Exp.[87] o $\frac{\overline{v'^2}}{(\overline{v'^2})_{max}}$
$\frac{\eta_0 - \eta}{(\eta_0 - \eta)_{max}} ; \frac{\overline{v'^2}}{(\overline{v'^2})_{max}}$
Teorie ---- $\frac{\eta_0 - \eta}{(\eta_0 - \eta)_{max}}$
Exp.[87] □ $\frac{\overline{u'v'}}{(\overline{u'v'})_{\eta_0 = 0.5}} \cdot \frac{(\partial U_a/\partial \eta_0)_{\eta_0 = 0.5}}{\partial U_a/\partial \eta_0}$
$\frac{\eta_0 - \eta}{(\eta_0 - \eta)_{max}} ; \frac{\overline{u'v'}}{(\overline{u'v'})_{\eta_0 = 0.5}} ; \frac{(\partial U_a/\partial \eta_0)_{\eta_0 = 0.5}}{\partial U_a/\partial \eta_0}$

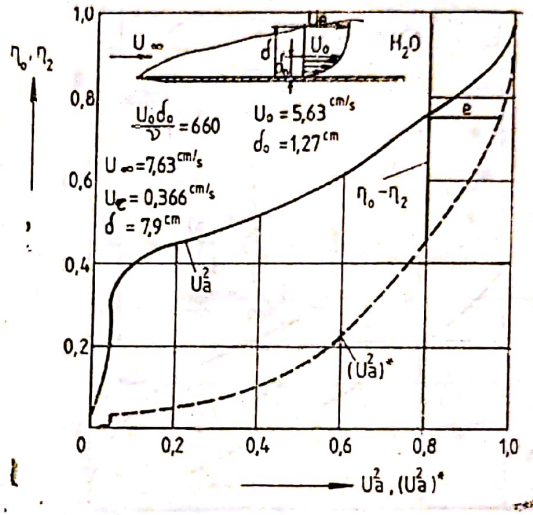
A6.13

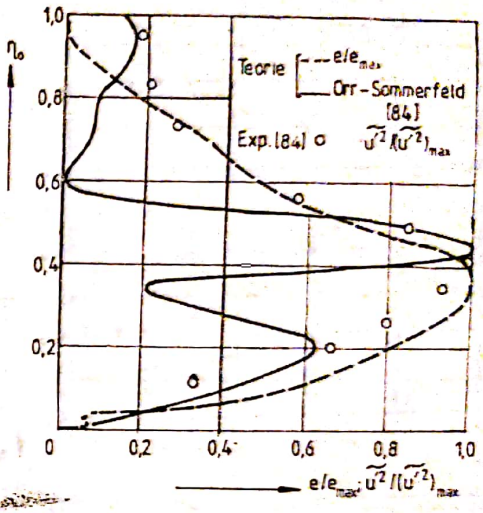

α
$\eta_0 ; \eta_2$
$Re = \frac{RU_e}{\nu} = 19.5 \cdot 10^4$
$Ua = U/Ue$
$\eta_0 = y/R$
$\eta_2 = \int_0^y U^2 dy' / \int_0^R U^2 dy'$
U_a^2
$(Ua)^*$
e
h
$U_a^2 ; (U_a^2)^*$
Teorie ---- e/e_{max}
Exp.[135] o $\overline{u'^2}/(\overline{u'^2})_{max}$
$e/e_{max} ; \overline{u'^2}/(\overline{u'^2})_{max}$

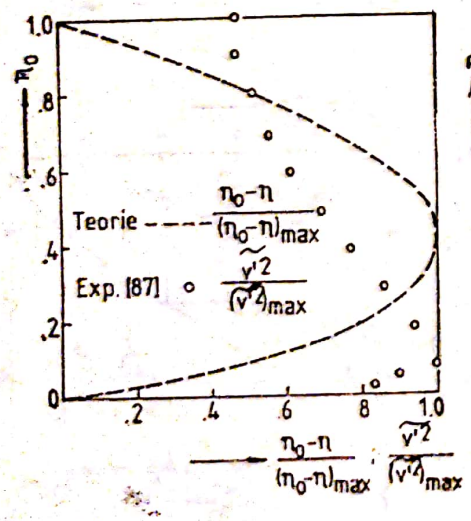
A6.14

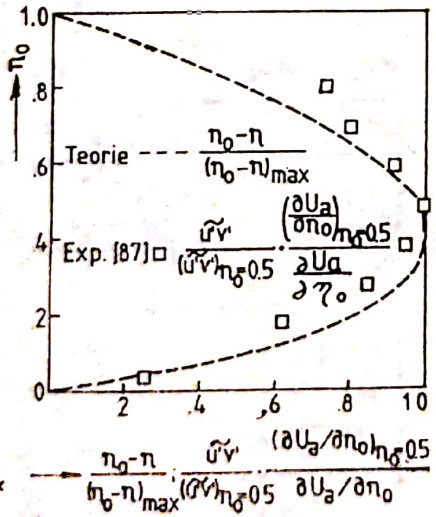




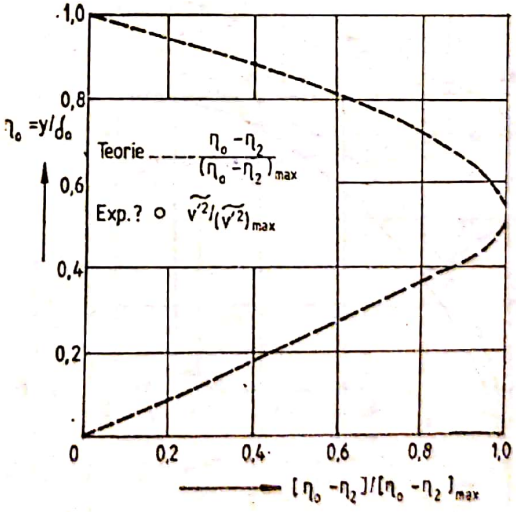


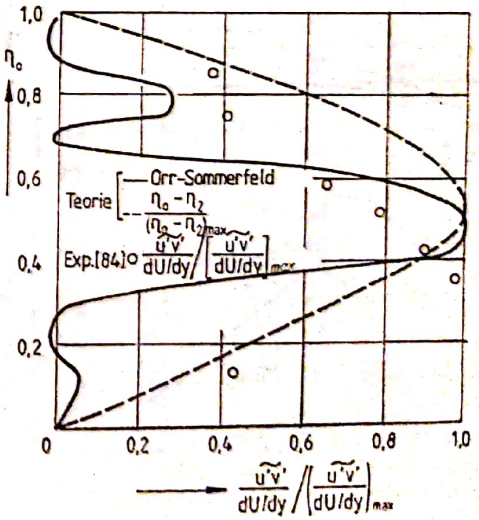






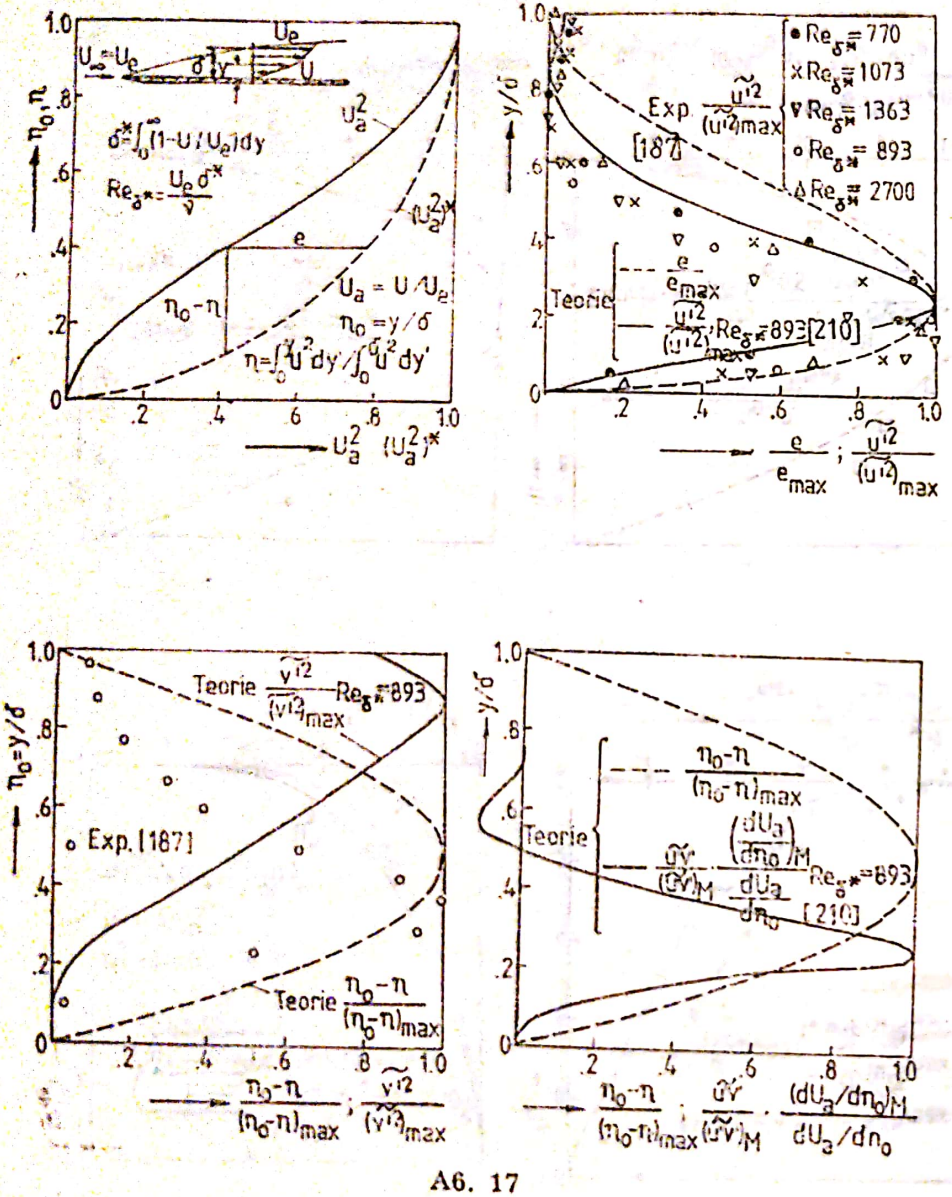
A6.15



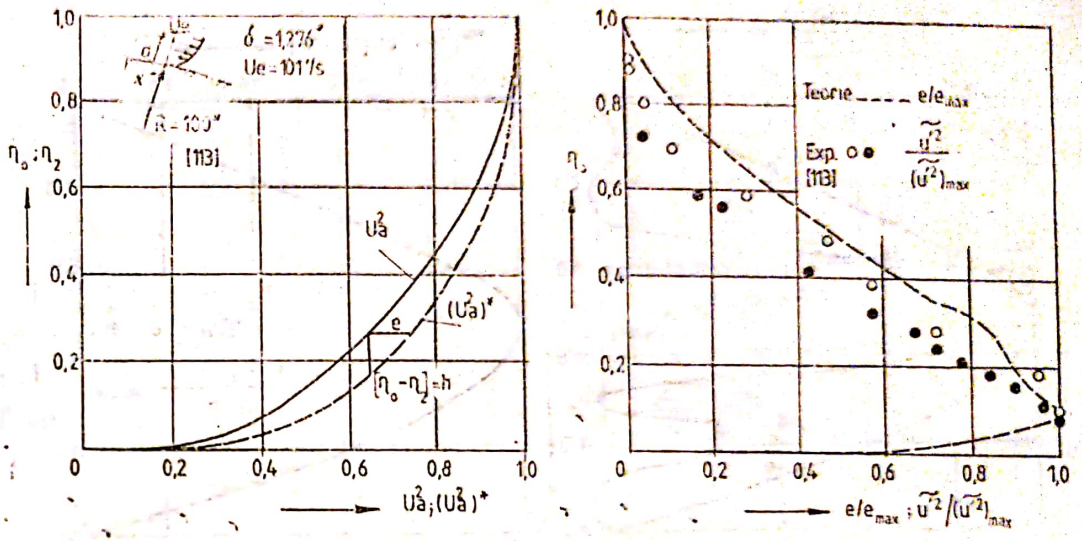


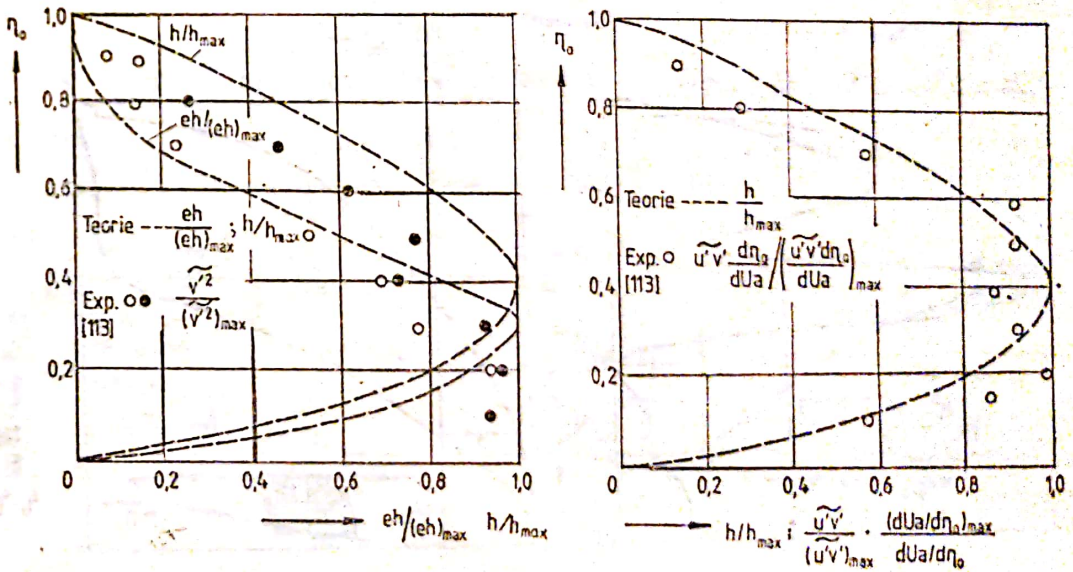
A6.16

Scanned with OKEN Scanner



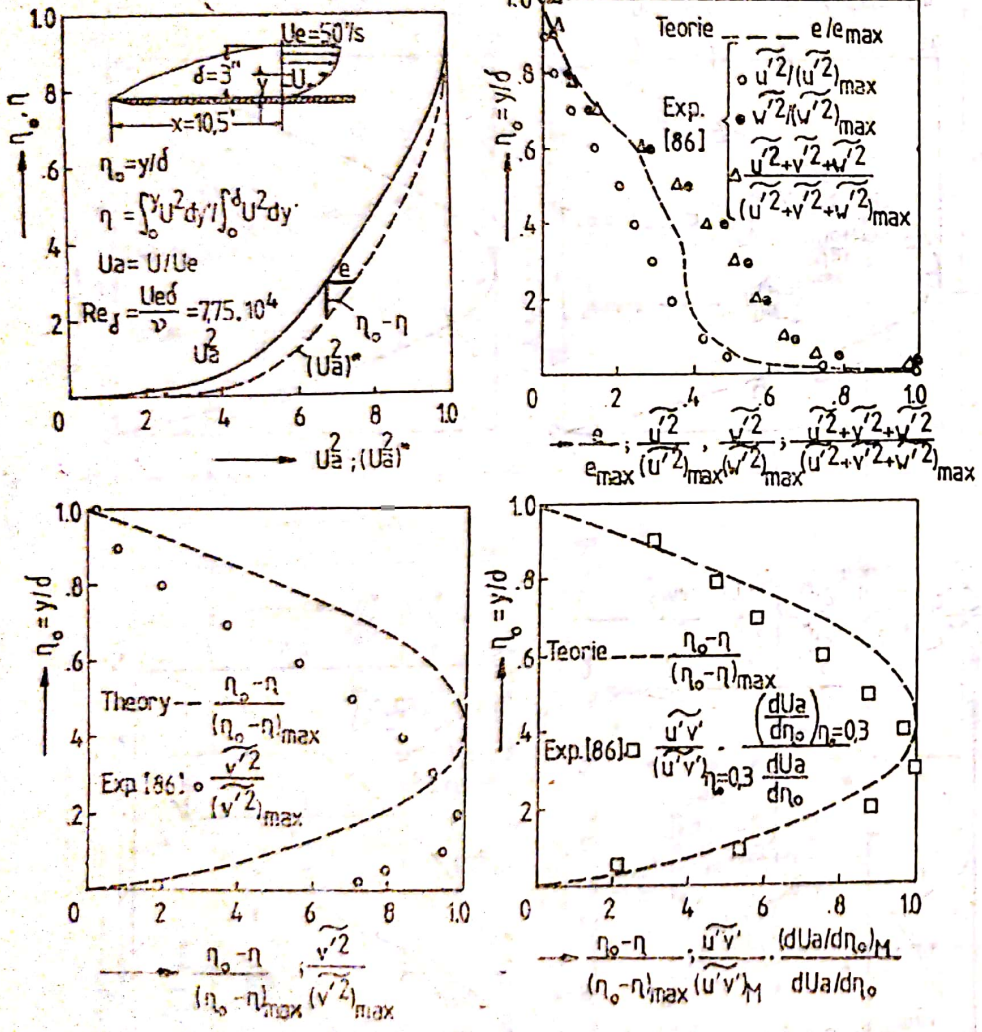
A6. 17



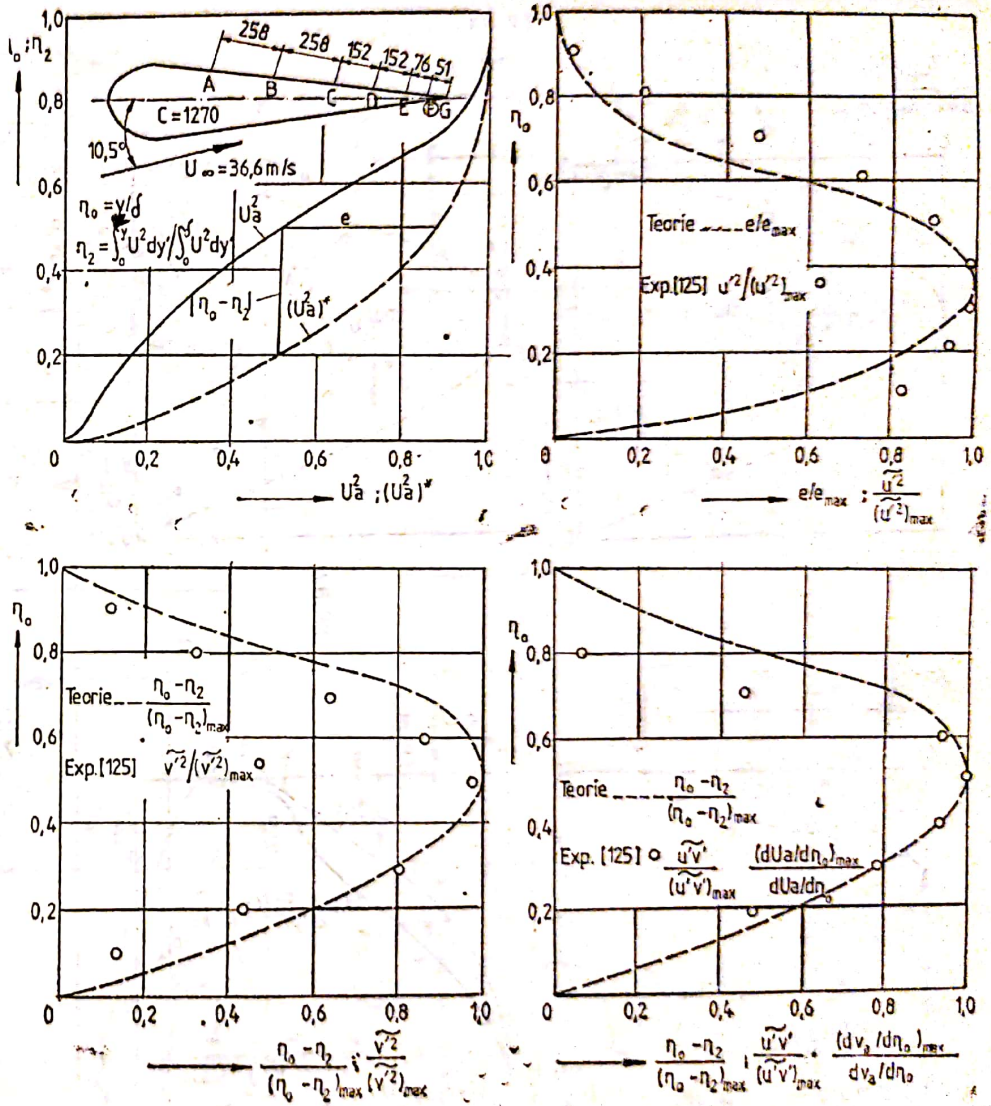


A6.18

Scanned with OKEN Scanner

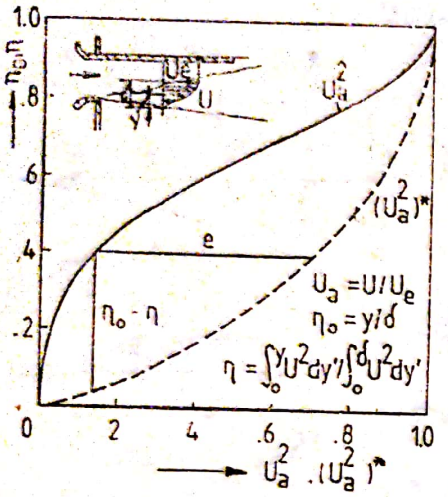


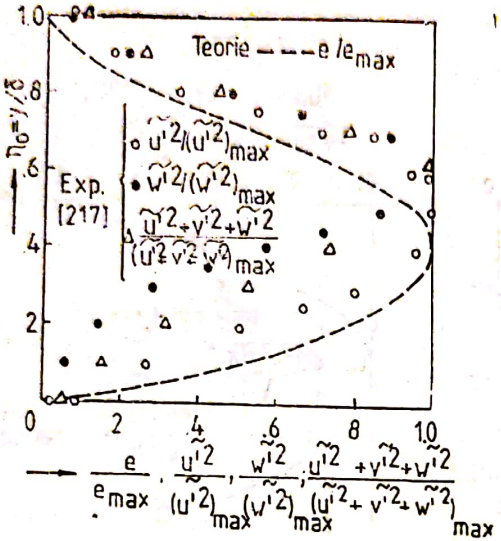
A6.19

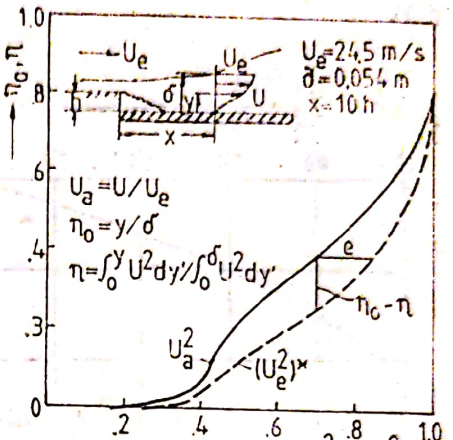


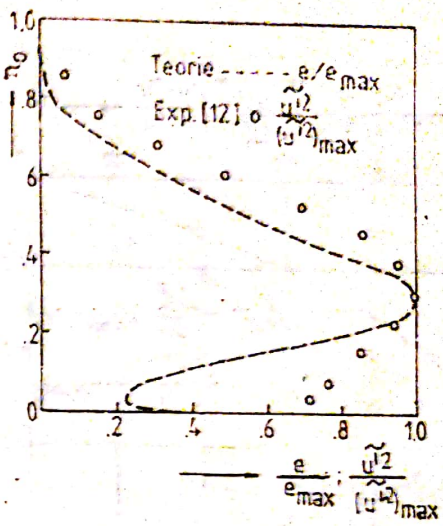
A6.20

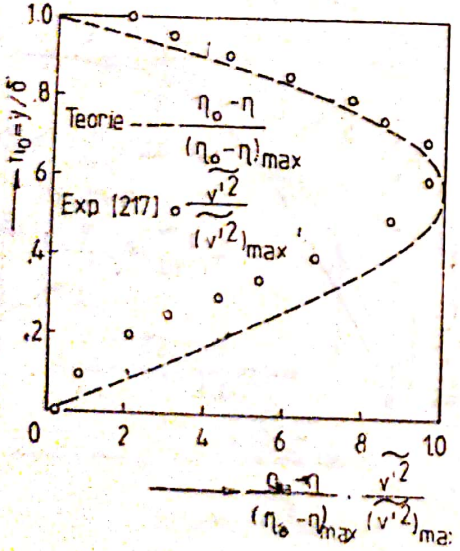
Scanned with OKEN Scanner

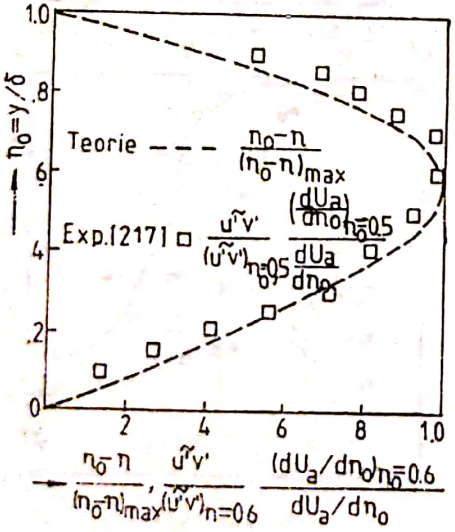




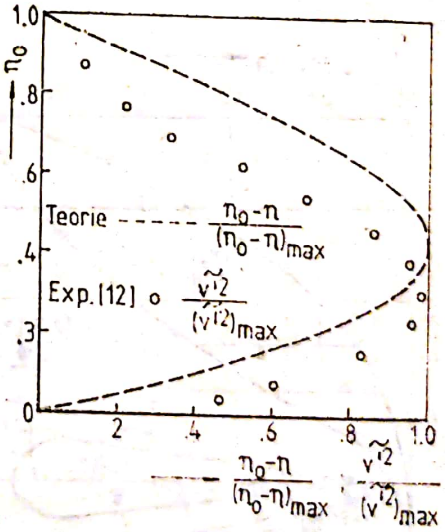


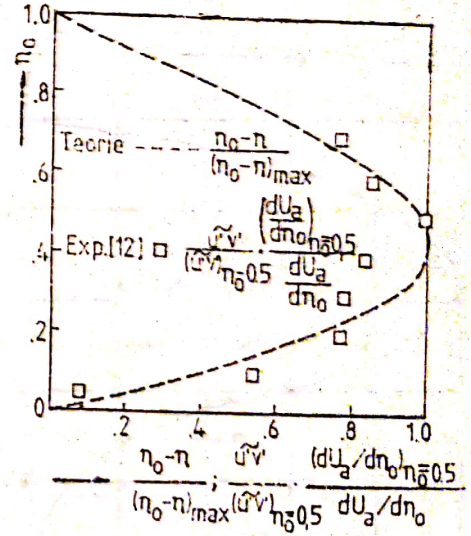






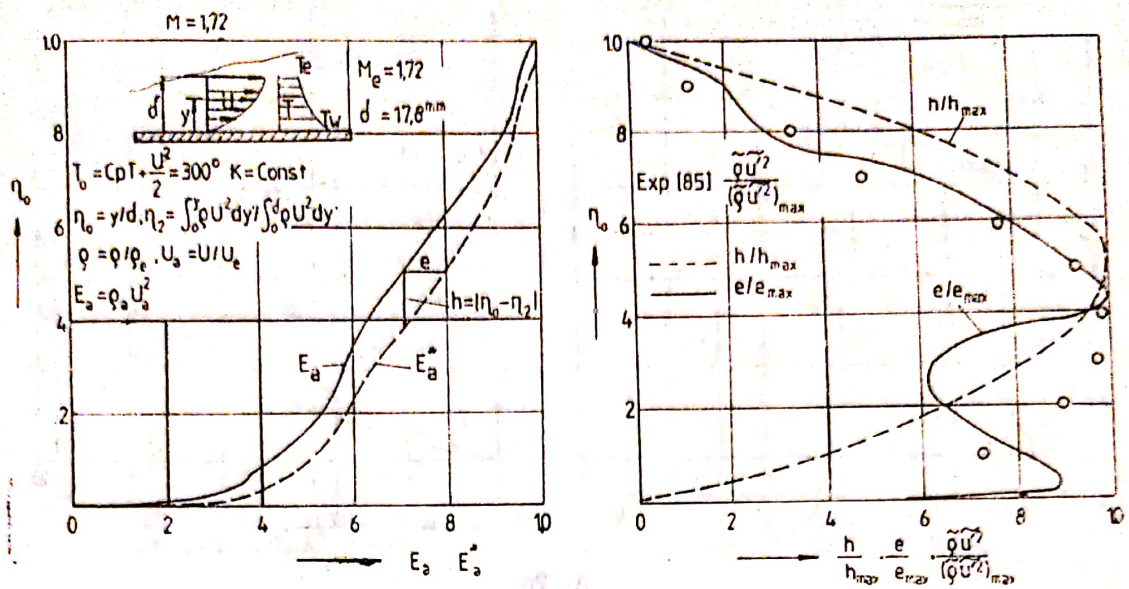
A6.21



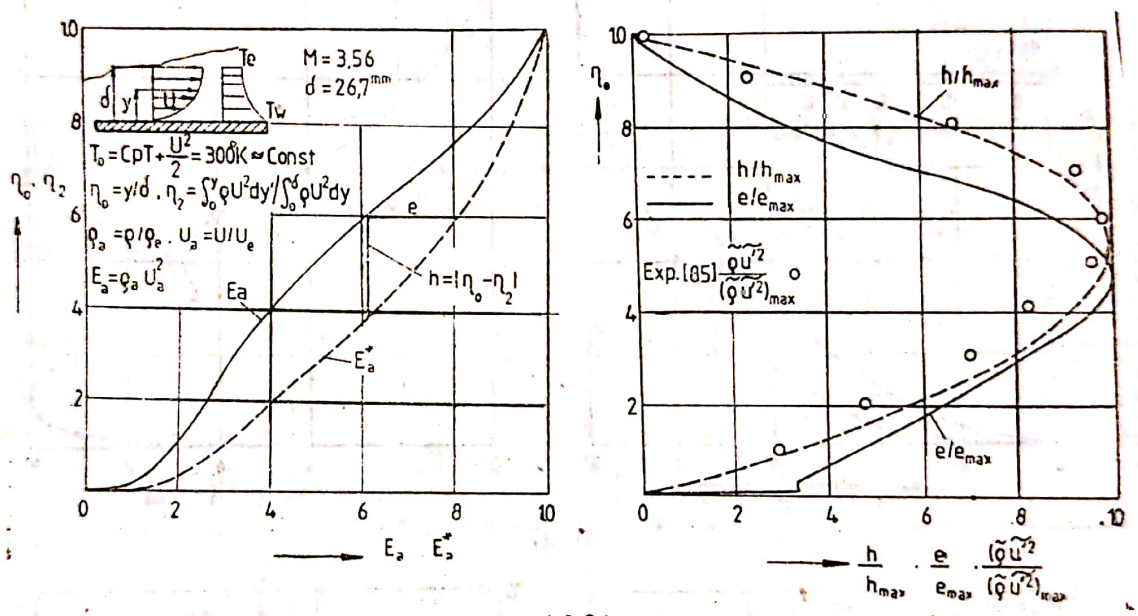


A6.22

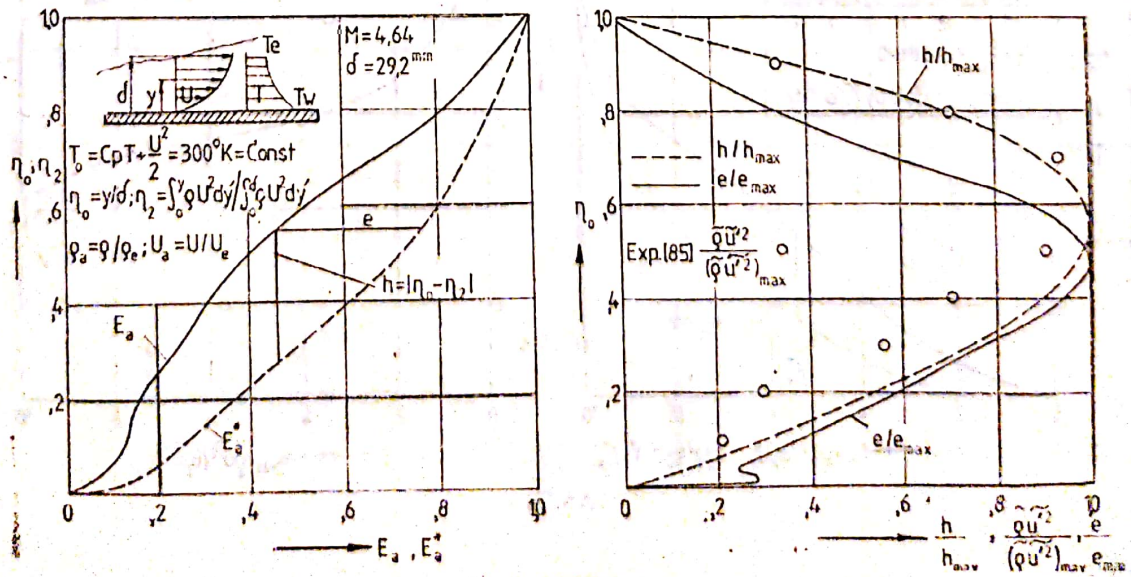
Scanned with OKEN Scanner



A6.23

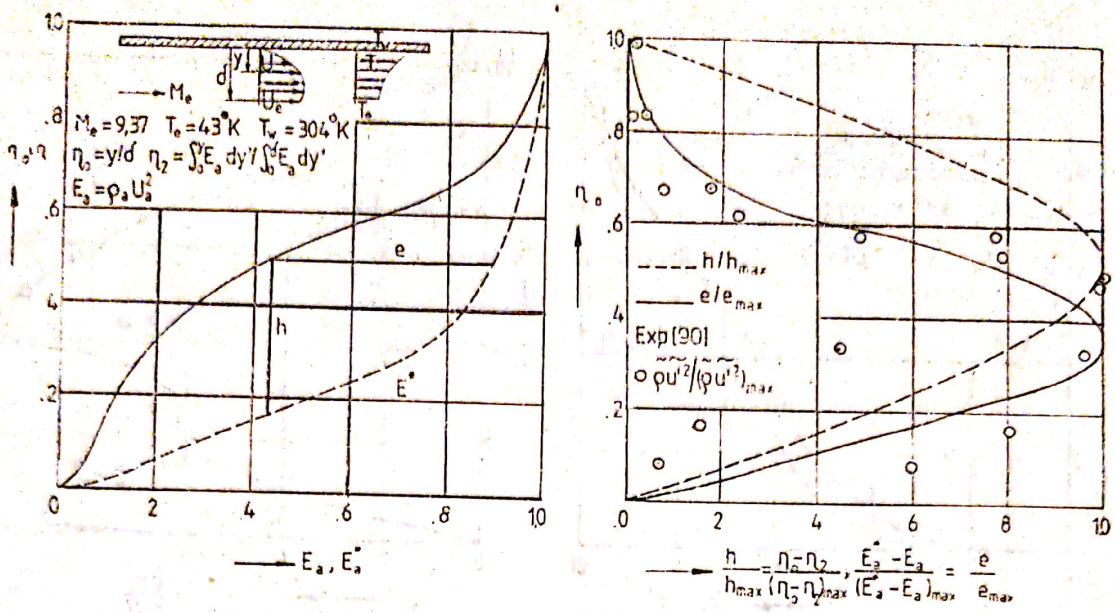


A6.24

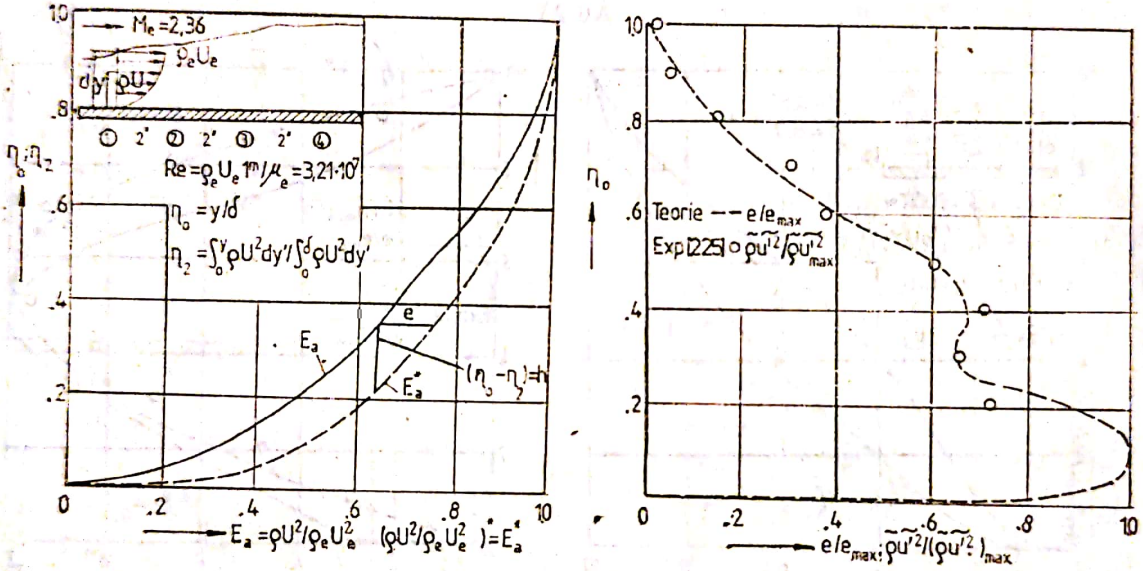


A6.25

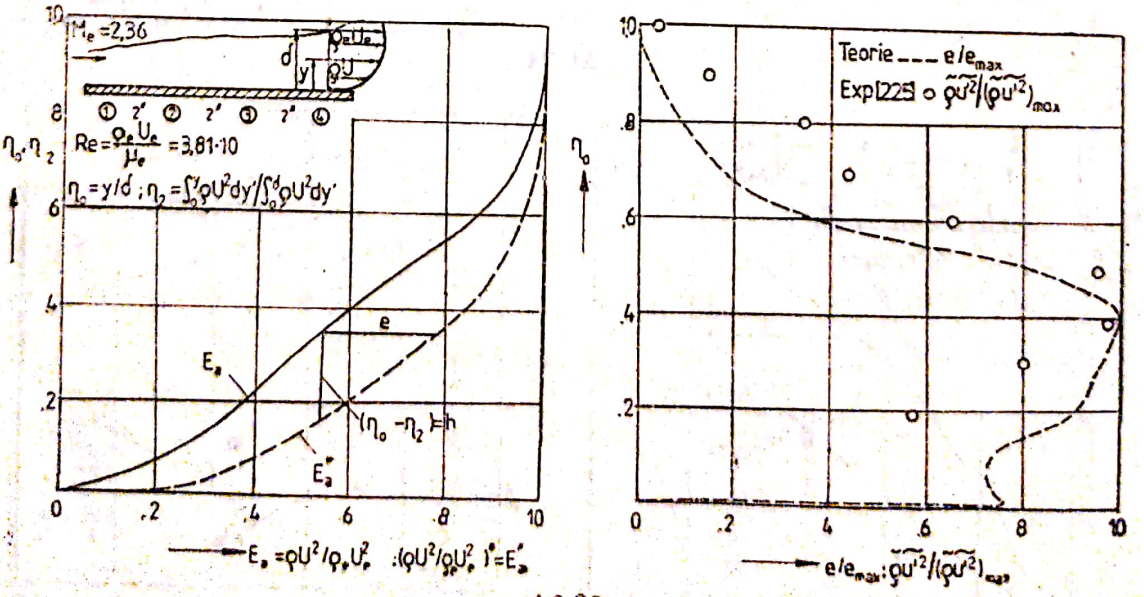
Scanned with OKEN Scanner



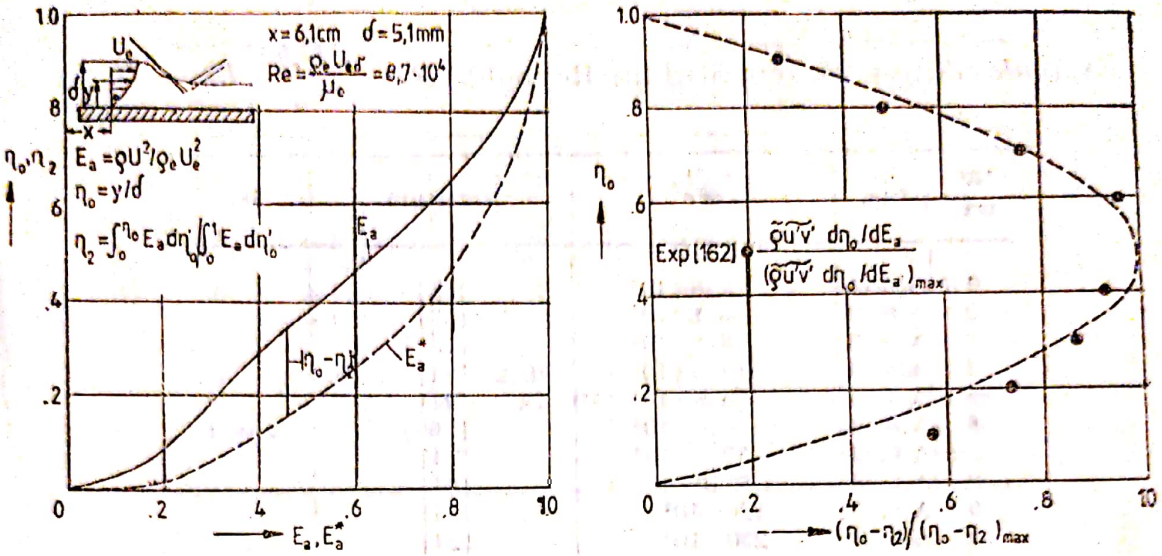
A6.26



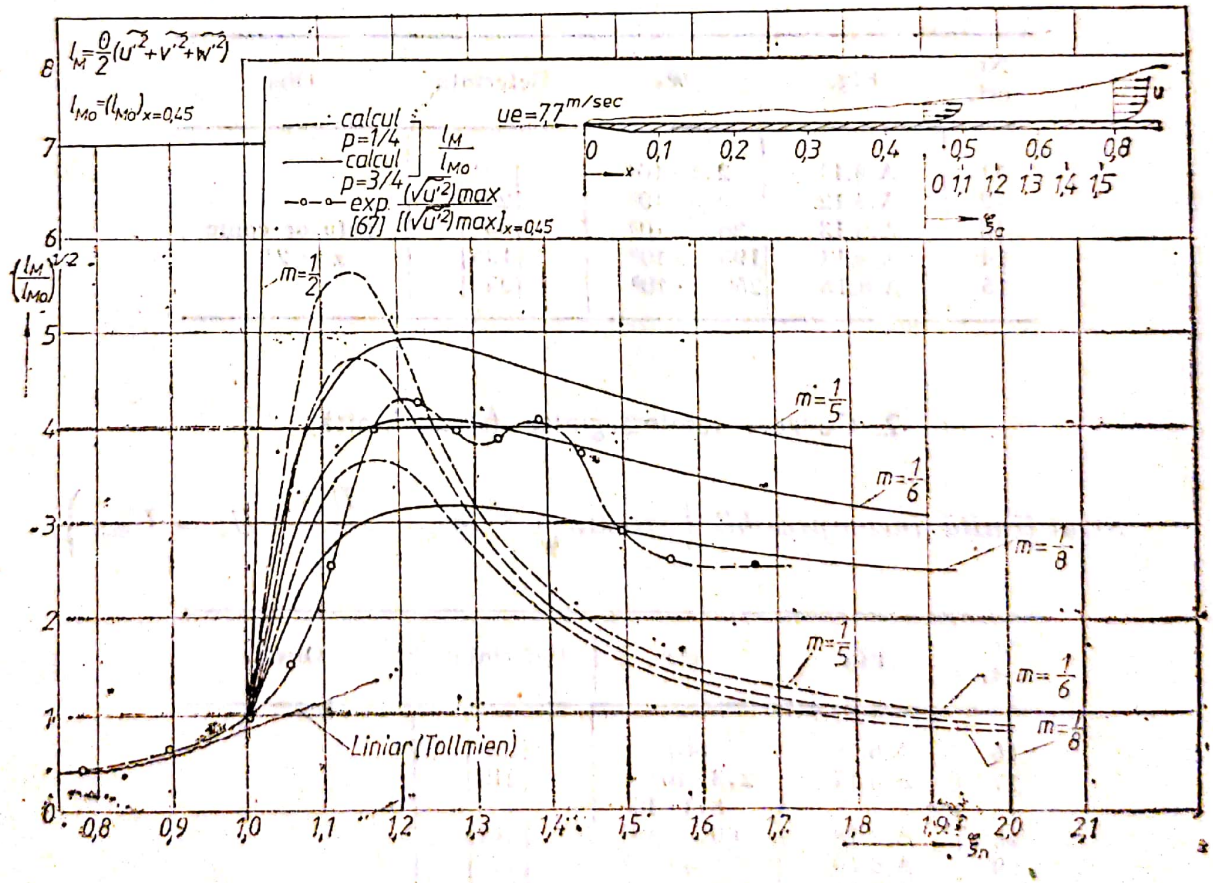
A6.27



A6.28



A6.29



A6.30

Scanned with OKEN Scanner

1. Curgeri mărginite

Canale (lățime $2b$, numărul lui Reynolds $\mathscr{R}e = \dfrac{U_e b}{\nu}$, $U_e = U_{max}$)

Nr. crt.	Fig.	$\mathscr{R}e$	Referință	Obs.
1	A.6. 1	$2{,}8 \cdot 10^3$	[38]	
2	A.6. 2	$4{,}1 \cdot 10^3$	[38]	
3	A.6. 3	$8{,}1 \cdot 10^3$	[158]	
4	A.6. 4	$12{,}3 \cdot 10^3$	[94]	
5	A.6. 5	$30{,}8 \cdot 10^3$	[94]	
6	A.6. 6	$31{,}4 \cdot 10^3$	[166]	$\alpha = 1°$
7	A.6. 7	$57 \cdot 10^3$	[24]	
8	A.6. 8	$61{,}6 \cdot 10^3$	[94]	
9	A.6. 9	$120 \cdot 10^3$	[24]	
10	A.6.10	$230 \cdot 10^3$	[24]	

Conducte (diametru $D = 2R$, $\mathscr{R}e = \dfrac{U_e R}{\nu}$, $U_e = U_{\max}$)

Nr. crt.	Fig.	$\mathscr{R}e$	Referință	Obs.
11	A.6.11	$2{,}1 \cdot 10^3$	[231]	
12	A.6.12	$9{,}5 \cdot 10^3$	[231]	
13	A.6.13	$25 \cdot 10^3$	[95]	Difuzor conic
14	A.6.14	$195 \cdot 10^3$	[135]	$\alpha = 2°$
15	A.6.15	$250 \cdot 10^3$	[95]	

2. Curgeri semimărginite (strat limită)

Strat limită incompresibil (grosimea δ, $\mathscr{R}e_\delta = \dfrac{U_e \delta}{\nu}$, $U_e = U_{\max}$)

Nr. crt.	Fig.	$\mathscr{R}e$	Referință	Obs.
16	A.6.16	660	[84]	
17	A.6.17	$2{,}3 \cdot 10^3$ — $8{,}1 \cdot 10^3$	[210]	
18	A.6.18	$66{,}5 \cdot 10^3$	[113]	
19	A.6.19	$77{,}5 \cdot 10^3$	[86]	
20	A.6.20	$195 \cdot 10^3$	[125]	
21	A.6.21		[231]	Strat de frecare
22	A.6.22		[11]	Strat limită în aval de un prag

Scanned with OKEN Scanner

Strat limită compresibil $\left(\text{grosimea } \delta, \mathcal{M}_e = \frac{U_e}{a_e}, \mathcal{R}_e = \frac{\rho_e U_e \delta}{\mu_e}\right)$

Nr. crt.	Fig.	$\mathcal{M}_e$	Referință	Obs.
23	A.6.23	1,72	[85]	Strat limită adiabatic
24	A.6.24	3,56	[85]	"
25	A.6.25	4,67	[85]	"
26	A.6.26	9,37	[90]	Perete răcit
27	A.6.27	2,36	[225]	Poziție inițială
28	A.6.28	2,36	[225]	Poziția 4
29	A.6.29	$\mathcal{R}_e = 87 \cdot 10^3$	[162]	Interacțiune undă de șoc strat limită

Scanned with OKEN Scanner

BIBLIOGRAFIE

1. Adams, E., *A class of similar solutions for the velocity and the temperature boundary layer in planar or axially symmetric channel flow*, Z.f. Flugwissensch, **11**, 315—322 (1963).
2. Arnal, D., Cousteix, J., Michel R., *Couche limite se développant avec gradient de pression positif dans un écoulement extérieur turbulent*, Rech. Aérosp., 1, (1976).
3. Back, L.H., *Conservation equations of a viscous, heat conducting fluid in curvilinear orthogonal coordinates*, NASA-TR 32—1332, 1968.
4. Baldwin, B.S., Mac Cormack, R.W., *Numerical solution of the interaction of a strong shock wave with a hypersonic turbulent boundary layer*, AIAA Paper 74—558, Palo Alto, California, 1974.
5. Banks, W.H.H., Drazin, P.G. *Perturbation methods in boundary-layer theory*, J. Fluid Mech:, **58**, *4*, 763—775 (1973).
6. Batchelor, G.K., *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1967.
7. Benney, D.I., Lin, C.C. *On the secondary motion induced by oscillations in a shear flow*, Phys. of Fluids, *4*, (1960).
8. Black, T.J., *Some practical applications of a new theory of wall turbulence*, Proc. of the 1966 Heat Transfer and Fluid Mechanics Institute, Standford Univ. Press.
9. Blasius, H., *Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung*, Z. Math. Phys., **56**, 1—37 (1908).
10. Bradshaw, P., *The response of a constant-pressure turbulent boundary layer to the sudden application of an adverse pressure gradient*, ACR Reports and Memoranda, No. 3575, 1969.
11. Bradshaw, P., Wong, F. Y. F., *The reattachment and relaxation of a turbulent shear layer*, J. Fluid Mech., **52**, 1 (1972).
12. Bradshaw, P., *The understanding and predication of turbulent flow*, Jahrbuch, 1972 der D. GLR.
13. Brodkey, R.S., Hershey, H.C., Corino, E.R., *An experimental facility for the visual study of turbulent flows*. In *Turbulence measurements in liquids* (eds. G.K. Patterson, J.L. Zakin), p. 127 (1971). Departament of Chemical Engineering Continuing Education Series, University of Missouri — Rolla.
14. Brown, S.N., Stewartson, K., *Laminar separation*, Annual Review of Fluid Mechanics, Vol. 1, Annual Review Inc., Palo Alto, California, 1969, 45—72.
15. Bucur Maria, *Determinarea caracteristicilor stratului limită cu ajutorul metodei lui von Mises generalizată*, St. cerc. mat., **30**, *1*, 1—12 (1978).
16. Bunimovich, L.A., Sinai, Ya. G., *Stohasticinost' attractora v modeli Lorenza*, articol în „*Nelineinie volnî*", Nauka, Moskva, 212—228 (1979).
17. Byron, Bird, R., Stewart, W.E., Lightfoot, E.N., *Transport phenomena*, John Wiley & Sons, Inc., New-York, 1965.
18. Carafoli, E., Oroveanu, T., *Mecanica fluidelor*, vol. II, Editura Academiei R.P.R., București, 1955.
19. Cebeci, T., Smith, A.M.O., *Analysis of turbulent boundary layers*, Academic Press, New York, 1974.
20. Cebeci, T., Hirsh, R.S., Whitelaw, J.H., *On the calculation of laminar and turbulent boundary layers on longitudinally curved surfaces* (TN), AIAA, J., **17**, *4*, 434—436 (1979).
21. Chang, P.K., Dunham, W.H., *Laminar Separation of flow around symmetrical struts at various angles of attack*, Schiffstechnik, **8**, *44*, 259—266 (1961).
22. Chen K, K., Libby, P. A., *Boundary layers with small deparatures from the Falkner-Skan profile*, J. Fluid Mech., **33**, *2*, 273—282 (1968).

Scanned with OKEN Scanner

23 Chow, R., Melnik, R. E., *Numerical solutions of the triple-deck equations for laminar trailing-edge stall*, Lecture Notes in Physics, **59**, 135—144 (1976).
24. Comte-Bellot, G., *Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles*, P.S.T du Min. de l'Air, No. 419, 1965.
25. Coppel, W., *On a differential equation of boundary layer theory*, Phil. Trans. Roy Soc., Series A, **253**, 101—136 (1960).
26. Corduneanu, C., *Sur certains systémes différentielles non-linéaires*, An. St. Univ. „Al. I. Cuza", Iași, sec. I, **6**, 257—260 (1960).
27. Curle, N., *Development and separation of a laminar boundary layer, under the action of a very sharp constant adverse pressure gradient*, Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, **74A**, 9, 1974/75, 119—134.
28. Curle, N., *Development of a laminar boundary layer under conditions of continuous incipient separation*, Proc. Roy. Soc. of Edinburgh, **76A**, 55—66 (1976).
29. Curle, N., *An accurate calculation method for two-dimensional incompressible laminar boundary layers, including cases with regions of sharp pressure gradient*, The Aeronautical Quarterly, **28**, 3, 149—162 (1977).
30. Davey, A., *Boundary-layer flow at a saddle point of attachment*, J. Fluid. Mech., **10**, 593—610 (1961).
31. Deiwert, G.S., *Recent computation of viscous effects in transonic flow*, Lecture Notes in Physics, **59**, 159—164 (1976).
32. Dumitrescu, T.D., *Strömung an einer Luftblase in senkrechten Rohr*, ZAMP, **23**, 3 (1943).
33. Dumitrescu, H., *Contribuții la studiul teoretic și experimental al unor curgeri cu aplicație în combustie*, Teză de doctorat, 1970.
34. Dumitrescu, H., Săvulescu, Șt. N., *On the effects of surface curvature on the turbulent boundary layer*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **18**, *4*, 633—649 (1973).
35. Dumitrescu, H., *Determinarea mișcării complete în jurul unui profil*, București, 1976.
36. Dumitrescu, H., Săvulescu, Șt. N., *Theoretical evaluation of turbulence intensities distributions, associated to Thompson's velocity profiles*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **22**, 5, (1977).
37. Dumitrescu, H., *O familie biparametrică de profile laminare de viteză*, Șt. cerc. mec. apl.)., **38**, 6,817—824 (1979).
38. Eckelmann, H., *Experimentalle Untersuchungen in einer turbulenten Kanalströmung mit starken viskosen Wandschichten*, Gött., 1971, 52.
39. Eckhaus, W., *Matching principles and composite expansions*, Lecture Notes Mathematics **594**, Springer, Berlin, 1977, 146—177.
40. Eichelbrenner, E.A., *Three-dimensional boundary layers*, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 5, Annual Reviews Inc., Palo Alto, California, 1973, 339—360.
41. Falkner, V.M., Skan, S.W., *Some approximate solutions of the boundary layer equations*, Aeronaut. Res. Counc. Report 1314 (1930); de asemenea, Phil. Mag., **12**, 865 (1931).
42. Ferri, A., Dash, S., *Viscous flow at high Mach numbers with pressure gradients*, „*Viscous interaction phenomena in supersonic and hypersonic flow*", University of Dayton Press, Dayton, Ohio, 1969.
43. Fife, P.C., *Towards the validity of Prandtl's approximation in a boundary layer*, Arch. Rational Mech. Anal., **18**, 1—13 (1965).
44. Fife, P.C., *The generation of a boundary layer in hydrodynamics*, Arch. Rational Mech. Anal., **21**, 286—302 (1966).
45. Fife, P.C., *Considerations regarding the mathematical basis for Prandtl's boundary layer theory*, Arch. Rational Mach., Analysis, **28**, *3*, 184—216 (1968).
46. Friedrichs, K.O., *Asymptotic phenomena in mathematical physics*, Bull. Amer. Math. Soc., **61**, *6*, 485—504 (1955).
47. Gaad, G.E., *Interactions between shock waves and boundary layers*, Symposium über Grenzschichtforschung, Freiburg i Br., 1957, 68—72.
48. Galbraith, R.A., Mc D., Head, M.R., *Eddy viscosity and mixing length from measured boundary layer developments*, The Aeron. Quarterly, XXVI, May, 1975, p. 2.
49. Garvine, R., *Upstream influence in viscous interaction problems*, The Physics of Fluids, **11**, 7, 1413—1423 (1968).
50. Geis, Th., *Ähnliche Grenzschichten an Rotationskörpern*, 50 Jahre Grenzschichtforschung, Braunschweig, Vieweg, 1955.
51. Geis, Th., *Elementarer Existenzbeweis für die Grenzschicht — strömung an einer Klasse rotierender Körper*, ZAMM, **36**, *5/6*, 222—229 (1956).
52. Geis, Th., *Ähnliche dreidimensionale Grenzschichten*, J. Rat., Mech. Anal., **5**, 643—686 (1956).
53. Georgescu, A., *On a nonlinear integral map in boundary layer theory*, Colocviul de mecanică, Iași, nov. 1976.

Scanned with OKEN Scanner

54. Georgescu, A., *Teoria stabilității hidrodiamice*, București, Ed. științifică și enciclopedică, 1976.
55. Georgescu, A., *On the nonexistence of regular solutions of Blasius-like equation in the theory of the boundary layer of finite depth*, va apărea în Rev. Roum. Math. Pures Appl..
56. Geropp., D., *Laminare Grenzschichten in ebenen und rotationssymmetrischen Lavaldüsen*, Porz-Wahn : DVLR-Forschungs-Bericht 71—90 (1971).
57. Gheorghiță, Șt. I., *Teoria stratului limită și turbulență*, Univ. din București, București, 1973.
58. Goldstein, S., *On backward boundary layers and flow in converging passages*, J. Fluid Mech., **21**, 33—45 (1965).
59. Guminski, K., *Termodinamica proceselor ireversibile*, Cap. 15 „*Teoria fluctuațiilor*", Ed. Acad. R.P.R., București, 1964.
60. Hakkiney, R.J., Greber, I., Trilling, L., Abarbanel, S.S., *The interaction of an oblique shock-wave with a laminar boundary layer*, NASA Memo. 2—18—59W (1959).
61. Hartman, P., *Ordinary differential equations*, Wiley, N.Y., 1964.
62. Hartree, D.R., *On an equation occuring in Falkner and Skan's approximative treatment of the equations of the boundary layer*, Proc. Camb. Phil. Soc., **33**, 223—239 (1937).
63. Hastings, S.P., *An existence theorem for a problem from boundary layer theory*, Arch. Rational Mech. Anal., **33**, 2, 101—109, (1969).
64. Hastings, S.P., *On existence theorems for some problems from boundary layer theory*, Arch. Rational Mech. Anal., **38**, 308—316 (1970).
65. Hastings, S.P., *On the uniqueness and asymptotic behavior of a similarity solution of a compressible boundary layer*, Arch. Rational Mech. Anal., **42**, 2, 128—136 (1971).
66. Hayashi, I.N., *Effects of surface curvature on laminar boundary-layer flow*, AIAA J., **1**, 914—915 (1963).
67. Hinze, J.O. et al., *Contribution à la transition dans la couche limite*, VIII-e Journ. de l'Hydraulique, Lille, 1964.
68. Hinze, J.O., *Turbulence*, ed. a II-a, Mc Graw-Hill Book Company, 1975.
69. Ho, D., Wilson, H.K., *On the existence of a similarity solution for a compressible boundary layer*, Arch. Rational Mech. Anal., **27**, 165—174 (1967).
70. Howarth, L., *The boundary layer in three dimensional flow I*, Phil. Mag., (7) **42**, 239—243 (1951).
71. Howarth, L., *Laminar boundary layers*, Handbuch der Physik, vol. 8/1, Berlin-Göttingen Heidelberg, Springer, 1959.
72. Huang, K., *Statistische mechanik*, I., Bibl. Inst. Mannheim, HochSchultaschenbücher Verlag, 1967.
73. Hussain, K.M.F., *Reynolds W.C., The mechanics of an organized wave in turbulent shear flow*, J. Fluid Mech., **41**, 2, (1970).
74. Jacob, C., *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest-Paris, 1959.
75. Iglisch, R., *Elementarer Existenzbeweis für die Strömung in der laminaren Grenzschicht zur Potentialströmung $U = u_1 x^m$ mitm > 0 bei Absaugen und Ausblasen*, ZAMM, **33**, 143—147 (1953).
76. Iglisch, R., *Elementarer Beweis für die Eindeutigkeit der Strömung in der laminaren Grenzschicht zur Potentialströmung $U = u_1 x^m$ mit $m \geqslant 0$ bei Absaugen und Ausblasen*, ZAMM, **34**, 441—443 (1954).
77. Iglisch, R., Kemnitz, F., *Uber die in der Grenzschichttheorie auftretende Differentialgleichung $f''' + ff'' + \beta(1 - f'^2) = 0$ für $\beta < 0$ bei gewissen Absange und Ausblasegesetzen*, 50 Jahre Grenzschichtforschung, Braunschweig, Vieweg, 1955.
78. Irwin, H.P.A.H., Smith, Aront P., *Prediction of the effect of streamline curvature on turbulence*, The Physics of Fluids, **18**, 6, (1975).
79. Issa, R.I., Lockwood, F.C., *On the prediction of two-dimensional supersonic viscous interactions near walls*, AIAA J., **15**, 2, 182—188 (1977).
80. Jarre, G., *Incompressible laminar skin-friction law*, Istituto di Meccanica Applicata del Politecnico di Torino, T.N. 40, 1968.
81. Johnson, D.S., *Velocity and temperature fluctuation measurements in a turbulent boundary layer downstream of a stepwise discontinuity in wall temperature*, J. Appl. Mech., Sep. 1959.
82. Kader, B.A., Yaglom, A.M., *Similarity treatment of moving-equilibrium turbulent boundary layers in adverse pressure gradients*, J. Fluid Mech., **89**, 2, 305—342 (1978).
83. Kármán, Th. von, Lin, C.C., *On the existence of an exact solution of the equations of Navier-Stokes*, Comm. Pure Appl. Math., **14**, 645—655 (1961).
84. Kim, H.T., Kline, J.S., Reynolds, W.C., *An experimental study of turbulence production near a smooth wall in a turbulent boundary layer with zero pressure gradient*, Reprint MD—20, Stanford, Jan., 1968.

Scanned with OKEN Scanner

201. Serrin, J., *Existence theorems for some compressible boundary layer problems*, Proc. Conf. Qualitative Theory of Non-Linear Differential Equations, Univ. of Wisconsin, 1968.
202. Seth, B.R., *Synthetic method for boundary layer problems*, Symposium über Grenzschichtforschung, Freiburg i Br., 22—24, 1957.
203. Sinai, Ya. G., *Stohasticinost' dinamiceskih sistem*, articol în *„Nelineinie volni"*, Nauka, Moskva, 192—211 (1979).
204. So, R.M.C., Mellor, G.L., *Experiment on convex curvature effects in turbulent boundary layers*, J. Fluid Mech., **60**, part I (1973).
205. Stewartson, K., *Correlated compressible and incompressible boundary layers*, Proc. Roy. Soc. A, **200**, 84—100 (1949).
206. Stewartson, K., *On the motion of a flat plate at high speed in a viscous compressible fluid*, Part. II, Steady motion, J. Aerospace Sci., **22**, 303—309 (1955).
207 Stewartson, K., Advanced in Applied Mech., **14**, 1974, Acad. Press.
208. Srokowski, A., Miller, G., *A model for analysis of viscous-inviscid interaction effects on blunt bodies in hypersonic flight*, Rept. NYU-AA—72—10, June 1972, NY Univ., New York.
209. Tetervin, N., *An exploratory theoretical investigation of the effect of longitudinal surface curvature on the turbulent boundary layer*, NOL-TR 69—22 February 1969, Naval Ordnance Lab., White Oak. Md.
210. Tollmien, W, *Uber die Korrelation der Geschwindigkeits-komponenten* ZAMM, **15** 1—2 (1935).
211. Townsend, A.A., *The structure of turbulent shear flow*, Cambridge Univ. Press, 1956.
212. *Turbulence and Navier-Stokes equations*, Lecture Notes in Mathematics, **565**, Springer Verlag, Berlin, 1976 (ed. R. Temam).
213. *Turbulence Seminar Berkeley* 1976/1977, Lecture Notes in Mathematics, **615**, Springer Verlag Berlin, 1977, (ed. P. Bernard, T. Ratiu).
214. Van Driest, E.R., *Investigation of laminar boundary layer in compressible fluids using the Crocco method*, NASA TN 2597 (1952).
215. Van Dyke, *Higher approximations in boundary layer theory*, part I, *general analysis*; part II, *parabola in uniform flow*, J. Fluid Mech., **14**, 161—177 şi 481—495 (1962).
216. Van Dyke, M., *Higher-order boundary layer theory*, Annual Review of Fluid Mechanics, vol. 1, Annual Reviews, Inc., Palo Alto, California, 1969, 265—292.
217. Van Ingen, J.L., *Theoretical and experimental investigation of incompressible laminar boundary layers with and without suction*, Dissertation, Delft, 1965.
218. Velte, W., *Eine Anwendung des Nirenbergschen Maximumprinzips für parabolische Differential gleichungen in der Grenzschichttheorie*, **5**, 420—431 (1960).
219. Ventres, C.S., *Shear Flow aerodynamics; Lifting Surface Theory*, AIAA Journal, **13**, 9, 1183—1189, (1975).
220. Viviand, H., Ghazzi, W., *Numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations at high Reynolds numbers with applications to the blunt body problem*, Lecture Notes in Physics **59**, 434—439 (1976).
221. Vvedenskaia, H.D. *O reşenie uravnenii pogranicinovo sloia v okrestnosti kriticeskoi tociki*, J. Vicisl. Mat. i Mat.-Fiz., **7**, 4, 924—929 (1967).
222. Walkden, F., *The Equations of Motion of a Viscous Compressible Gas Referred to an Arbitrarily Moving Co-ordinate System*, Reports and Memoranda, no. 3609, 1969.
223. Walter, W., *On the asymptotic behavior of solutions of the Prandtl boundary layer equations*, Indiana Univ. Mathematics Journal, **20**, 9, 829—841 (1971).
224. Walter, W., *Konstruktive Existenzsätze in der mathematischen Grenzschichttheorie auf Grunder Linienmethode*, ZAMM, **56**, Sonderheft, T36—T44 (1976).
225. Waltrup, P.S., Schetz, J.A., *Supersonic turbulent boundary layer subject to adverse pressure gradients*, AIAA Journal, **11**, 1 (1973).
226. Watson, J., *On the existence of solutions for a class of rotating disc flows and the convergence of successive approximations*, J. Instit. Math. Applic., **1**, 348—371 (1965).
227. Werle, M.J., Vatsa, V.N., *New method for supersonic boundary-layer separation*, AIAA Journal, **12**, 1491—1497 (1974).
228. Westphal, H., *Zür Abschätzung der Lösungen nichtlinearer parabolischer Differentialgleichungen*, Math. Z., **51**, 690—695 (1949).
229. Weyl, R., *On the differential equation of the simplest boundary-layer problems*, Ann. of Math., **43**, 381—407 (1949).
230. Wygnanski, J., Champagne, F.H., *On transition in a pipe*. Part I, J. Fluid Mech., **59**, 2, 281—335 (1973).
231. Wygnanski, J. Fiedler, H.E., *The two-dimensional mixing region*, Boeing Sc. Res. Lab., D1—82—0951, 1970.
232. Yen, K. T., Toba, K., *Some effects of surface curvature on the laminar boundary layer flow*, J. Aerospace Sci., **28**, 877—884 (1961).

Scanned with OKEN Scanner

INDICE DE MATERIE

Aderență, condiția de 15
Adiabatic, curgere compresibilă 196
Aleator, caracter 108
Atractorul lui Lorentz 105
Autocorelație 118
Contracție, operator de 98
Coordonate carteziene 216
— curbilinii ortogonale 66
— transformări de 72
Corelație spațială 118
— temporală 118
— spațiotemporală 118
— tensor de 187,192
— coeficient de 118
Critic, număr Reynolds 103
Curgere mărginită 71
— semimărginită 71
— liberă 71
— complexă 71
Densitate de probabilitate 114
Desprindere, zonă de 26
Dezvoltări asimptotice 18
— exterioare 19
— interioare 19
Difuzie, proces de 71
coeficient de 181
Dimensiune Hausdorff 104
Dinamica fluctuațiilor 133
Discret-continuum 13
Disipație, proces de 136
Distribuție de concentrație 70
— — presiune 102
— — temperatură 70
— — viteză 70
Ecuația lui Blasius 28
— de continuitate 17
— energiei 28
— Falkner-Skan 28
— Howarth 29
— Karman 29
— Navier-Stokes 17
— Pohlhausen 28
— Prandtl 16
— Prandtl-Kolmogorov 27
— Reynolds 27
— Stewartson 28
— de stare 187
— lui Gortler 37
Entalpie 115
Eratic 108
Factor de aplatisare 116
— disimetrie 116
— formă 102
Fluctuații matematice 99
Formulare integro-diferențială, FID 39, 105
Frecare, coeficient de
— curgere de 39
— tensiuni de 39
Frontieră 148
Funcția 39
Gauss, distribuție
Gaz perfect
Grad de turbulență
Grosime a stratului limită 24
— de deplasare 24
— a pierderilor de impuls 24
— sa pierderilor de energie 24
Intensitate a fluctuației
Interacțiune vîscos-neviscos 25
— undă de șoc-strat limită 26
Laminar, strat limită 147
Lege logaritmică
Lema Nagumo-Westphal 29, 30, 62, 207
Lungime de amestec 134
Mediere 113
Nestaționare, mișcări 48
— efecte
Numărul lui Eckert 71
— — Mach 196
— — Nusselt 158, 159
— — Prandtl 56
— — Reynolds 71
— — Schmidt 71
Operator integral
Particulă
Perturbații, metoda ~iilor 18
Prandtl, modelul lui Prandtl
Profil de viteze 146, 147
Thompson
Problemă de aproximații succesive 98
— inițială
Punct de desprindere 152, 154, 164
— fix
— de ramificare 103
Scară a continuumului 108
— de turbulență

Scanned with OKEN Scanner

Soluţie aproximativă
— asimptotică
— aproape peste tot 46
— Blasius
— Generalizată 104
— turbulentă 132
Spaţiu metric 98
Spectru 108
Stabilitate 60
Stocatic, model 128
— perturbaţie, ă 131, 132
Structură a curgerii
Tensiuni turbulente (Reynolds)
Teoreme de comparaţie, 202, 206
Transformare Crocco 36
— Dorodniţîn 37
— Gortler 37
— von Mises 34
— de similaritate 37
— Săvulescu-Ferrari 39
— Stepanov-Mangler 37
Transfer de căldură 156
— de impuls
— de masă
Transport molecular
— turbulent
Tranziţie artificială 151
— criteriu de
— strat limită în tranziţie 147
Turbulenţă
Viscozitate moleculară 200
— tubulentă 149
Viteză, profil de ~ 163
— fluctuaţii de ~ 217
— de frecare 198

Scanned with OKEN Scanner

ŞT. N. SĂVULESCU, ADELINA GEORGESCU, H. DUMITRESCU şi MARIA BUCUR.

Cercetări matematice în teoria modernă a stratului limită (Mathematical investigations into the modern theory of the boundary layer)

Editura Academiei R. S. R., Bucureşti, 1981, 250 p.

(ABSTRACT)

The aim of this book is a treatment of the physical, mathematical and experimental aspects of shear flows of boundary layer type, having as point of departure Prandtl's original model.

The first chapter discusses the position of the boundary layer theory among the mathematical models of mechanics and physics, the viscous-inviscid interaction being emphasized. The simplest case of Prandtl's model is considered; for it the mathematical problem corresponding to two theories (asymptotic and of a finite thickness) of the boundary layer is set. The existence, branching and the connection between the similar solutions and the boundary layer separation are pointed out. The rigorous mathematical treatment of the problems stated in this chapter are given in Ch. 2. Among the transformations of coordinates used in boundary layer theory we have analysed only those of von Mises type (for the asymptotic theory) and those of von Mises generalized type (for the finite thickness theory), which allow a qualitative analysis of Prandtl's transformed equations, using some parabolic inequalities. In their simplest form these last transformations have been given by Săvulescu-Ferrari, while the general form belongs to Săvulescu. This type of transformations is the basis of the integro-differential formulation (IDF) of the boundary layer equations, this formulation being both theoretically and experimentally extensively analysed in the book.

Chapter 2 presents the rigorous results obtained in the asymptotic theory of the boundary layer concerning the existence, uniqueness and stability of the solutions of Prandtl's equations, their connection with the solutions of Euler and Navier-Stokes equations, their asymptotic behavior etc. by applying to Prandtl's equations some parabolic differential inequalities. The constructive approach of proving the existence of the solution yields the approximative solution and the error estimation. The physical situation which corresponds to Prandtl's original equations, analysed in the present chapter, is as simple as possible; the straight-lines method, on which the above-mentioned proof is based, can be extended to more complex cases. Thus, the next step is that of studying also Prandtl's equations but written in Săvulescu-Ferrari coordinates, where, apart from the unknown u, the thickness of the boundary layer occurs also as an unknown. In this case parabolic inequalities corresponding to a system of two equations must be used. Therefore this analysis belongs to the theory of finite thickness of the boundary layer; the setting of the initial and boundary-value problem for Prandtl's equations in the Săvulescu-Ferrari form is minutely treated in the book. Our work points out open problems connected to more complex physical situations.

Scanned with OKEN Scanner

Chapter 3 starts with a complete scheme of the boundary layer theory, which largely overpasses the mathematically well investigated domain of Prandtl's model. The IDF covers most part of this theory, since, due to the large gradients along the normal to the flow, the equations governing the motion can be written as equations of diffusion type, where the transferable amount A is the momentum, the mass or the heat. In the IDF a transformation of coordinates (§3.3) of generalized von Mises type $\xi = x,\ \eta = \int_0^y \varphi(A)\,dy' / \int_0^\delta \varphi(A)dy',\ \zeta = z,\ \tau = t$ is used together with an integral operator T whose properties are minutely analysed (§3.4). As an application, the transformed equations for a boundary layer with simultaneous mass and heat transfer as well as the kinetic energy equation and the energy equation is terms of the temperature are written.

The last paragraph (§3.5), yields conditions for φ in order that the mathematical problem of the flow in the boundary layer written in the operational form $u = f(u)$ admits an unique solution which can be found by a converging process of successive approximations; more precisely, sufficient conditions are given such that f is a contraction map. Some of these conditions are fulfilled when $\varphi(A) = A$.

Ch. 4 starts with the discussion of the stochastic nature of the fluctuations beginning with the deterministic conservation equations in continuum. Landau-Hopf (repeated branching), Leray (generalized solutions) and Ruelle-Takens (attractors) pictures are shortly exposed. Some further considerations are made, concerning the nature of the fluctuations deduced from Boltzmann equations and the cyclicity of the phenomenon of ejection interpreted by means of the transformation of coordinates in the boundary layer. The statistics of fluctuations and their Reynolds picture are synthetically presented as an usual language of experimental data. In addition, the Reynolds equations in curvilinear orthogonal coordinates are given in extenso. The original part consists of the interpretation of IDF in order to put into evidence the fluctuation field in the shear flows which occure as consequences of this formulation. Therefore an explicative theory based on Navier-Stokes equations is presented without introduction of some apriori additional splittings into means and fluctuations. As an application, some amounts are deduced, which give the measure of the intensity and the distribution of the fluctuations associated to a mean velocity profile; a general formula for the Reynolds stress tensor is established. Finally, models of the fluctuations dynamics, deduced from Reynolds' equations or from FID, are discussed.

In the literature of the field, the mean characteristics of the boundary layer are obtained from approximative analytical relations which are established separately for each régime of flow: laminar, transitional and turbulent. Unlike these methods, the IDF allows an unitary analytic treatment of the real boundary layer which implies in its evolution all the flow régimes. The expression proposed by us for the „viscosity" of the flow has an universal character since it can be used for all incompressible flows of boundary layer type. In §§5.1, 5.2 we show how the velocity profile can be calculated by a procedure of successive approximations, as a solution of an integro-differential equation and the boundary layer thickness, by means of the function $\psi_\delta = \int_0^\delta U(y)\,dy$, given by an ordinary differential equation. Then, in §5.3, one passes to the calculation, by means

Scanned with OKEN Scanner

of these two quantities, of the mean friction coefficient $K_f = \frac{1}{X}\int_0^X C_f(x)\mathrm{d}x$ (applications to the flat plate-especially the transition zone) and of the separation point defined by the condition $C_f(x) = 0$. Using the IDF of the energy equation in terms of the heat for an incompressible flow, together with an expression for the conductivity coefficient in the fluctuating régime the continuous variation of the Nusselt number from the laminar régime to the fully developped turbulent régime is obtained in § 5.4. The paragraph 5.5 investigates the modification of the Blasius profile due to weak threedimensional effects introduced by a lateral velocity w of a prescribed form. In the last paragraph (§5.6) the numerical results obtained by IDF are compared with those given by other approaches for particular cases of the motion in the laminar and turbulent two-dimensional boundary layer.

Owing to the comprehensive and unitary character of IDF, various cases which represent separate chapters of the boundary layer mechanics are considered as simple effects appearing in IDF as new terms as well as diffusion "coefficients" D. After giving in §6.1 some evaluation rules of an effect, in the following paragraphs of Ch. 6, the following cases are treated by these rules : 1) the threedimensional effects in the boundary layer (§6.2), giving as an application the calculation of the continuous variation of the mean friction coefficient of the momentum of momentum on a rotating disk from laminarity to turbulence ; 2) the effect of the curvature (§6.3) on the boundary layer characteristics having as an application the calculus of thec ontinuous variation from laminar to turbulent régime of the local friction coefficient on surfaces having longitudinal curvature ; 3) effects of nonstationarity (§6.4) ; compressibility effects (§6.5) in the boundary layer, with application to the adiabatic flat plate, where the continuous variation from laminarity to turbulence of the mean shear coefficient in terms of the Mach number is given. It is also extended the expression of the "viscosity " to the compressible flows by correcting D with the effect of the Mach number. In the last paragraph of Ch. 6, on the basis of analysing numerous experimental results in the incompressible as well as in the compressible case, expressions for the constants which appear in the "universal" law proposed for the corelations are given and the distributions of the Reynolds stress deduced from the fluctuation theory by IDF are experimentally checked. We remark the usefulness of this method as a control tool in the systematic performance of an experimental program with respect to the flow structure. This program can even yield laws and testing criteria of the measuring instruments used for the determination (especially in the compressible case), as well as for the verification of various models of calculation, of the characteristics of the turbulent flows.

The Appendix 1 contains maximum principles and comparison theorems on which is based the proof of the theorems presented in Ch. 2. A particular case of formulae in §4.4 is given in Appendix 2 ; these formulae are very useful for applications. Some integrals of functions connected with the transformed velocity profile are given in Appendix 3. The Appendix 4 is a short exposure of the inner-outer expansion method and the Appendix 5 gives some systems of orthogonal coordinates. The last Appendix 6 is devoted to the distribution of the fluctuations in shear flows and to experimental data analysed by IDF.

Scanned with OKEN Scanner

CONTENTS

Introduction

CH. 1. PRANDTL'S MODEL OF THE BOUNDARY LAYER

§ 1.1. Physical frontiers of the potential flow 13
§ 1.2. Prandtl equations 16
1.2.1. Derivation of Prandtl equations 16
1.2.2. Initial and boundary-valve problem for the Prandtl equations 21
1.2.3. The viscous-inviscid interaction 25
1.2.4. Similar solutions 27
§ 1.3. Equivalent forms of Prandtl equations and methods for their solution 34
1.3.1. Transformations of coordinates 34
1.3.2. The integro-differential formulation of the mathematical problem of the viscous fluid motion in the boundary layer 39

CH 2. THE QUALITATIVE ANALYSIS OF THE PRANDTL EQUATIONS

§ 2.1. Existence and uniqueness 42
2.1.1. Symmetric plane stationary motions. Classical solutions . . 43
2.1.2. Plane stationary motions having $u_1 > 0$ at $x = 0$. Classical solutions 45
2.1.3. Plane stationary motions having $u_1 > 0$. Weak solutions . . . 45
2.1.4. Symmetric plane nonstationary motions having $u_0 \equiv 0$. Almost everywhere solutions 46
2.1.5. Axisymmetric nonstationary motions having $u_1 > 0$. A.e.w. solutions 48
2.1.6. Nonstationary plane motions having $u_1 > 0$ 49
§ 2.2. Asymptotic expansions (Drag. The rôle of the concave profiles and of the similar profiles) 50
§ 2.3. The nonexistence of the solutions of Prandtl equations (The separation point) 55
§ 2.4. The connection between Navier-Stokes equations and Prandtl equations 57
§ 2.5. Stability of the solutions 60
§ 2.6. A posteriori error bounds in Prandtl's boundary layer 62

Scanned with OKEN Scanner

CH. 3. AN INTEGRO-DIFFERENTIAL FORMULATION OF SOME NONLINEAR SECOND ORDER PATIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF DIFFUSIVE TYPE

§ 3.1. Extensions of Prandtl's picture 65
§ 3.2. Transformations of coordinates and the transformed equations . . 72
§ 3.3. The integro-differential formulation 77
§ 3.4. The properties of the integral map 79
3.4.1. Setting of the problem 79
3.4.2. The properties of the map T 81
3.4.3. Classes of typically transformable functions 93
§ 3.5. The problem of the succesive approximations 98

CH. 4. FLUCTUATIONS IN SHEAR FLOWS

§ 4.1. Phenomenological and statistical models of the fluctuations in fluid mechanics 102
§ 4.2. On the physical origin of fluctuations 108
§ 4.3. The statistics of the fluctuations 112
§ 4.4. Reynolds picture of the field of the fluctuations 121
§ 4.5. Fluctuations field picture by an integro-differential formulation of the Navier-Stokes equations 127
§ 4.6. The determination of the distributions of the fluctuations associated to a profile of mean velocities 133
§ 4.7. Models of the fluctuations dynamics 140

CH. 5. THE DETERMINATION OF THE CHARACTERISTICS OF THE BOUNDARY LAYER BY MEANS OF THE INTEGRO-DIFFERENTIAL FORMULATION

§ 5.1. Velocity profile 145
§ 5.2. The boundaries of the boundary layer 148
§ 5.3. The friction and the separation 152
§ 5.4. The heat transfer at the wall 156
§ 5.5. Weak three-dimensional effects in the two-dimensional boundary layer 160
§ 5.6. Comparison between the results obtained by FID and by other methods 163

CH. 6. APPLICATIONS OF THE INTEGRO-DIFFERENTIAL FORMULATION. NUMERICAL EXAMPLES

§ 6.1. General comments 167
§ 6.2. Three-dimensional effects in the treatment of the boundary layer equations 169
§ 6.3. The effect of the curvature on the characteristics of the boundary layer 176
§ 6.4. Nonstationary effects in the boundary layer equations 181
§ 6.5. Compresibility effects in the boundary layer 185
§ 6.6. The distribution of the Reynolds stress tensor in shear flows . . . 191

Scanned with OKEN Scanner

APPENDIX

Appendix 1 — Maximum principles. Comparison theorems 202
Appendix 2 — The equations governing the fluctuating incompressible mean flow in orthogonal curvilinear coordinates 207
Appendix 3 — Integrals 213
Appendix 4 — Inner and other expansions. 215
Appendix 5 — Systems of local coordinates 216
Appendix 6 — Distribution of fluctuations in shear flows. Experimental data processed by IDF 217

References 235

Index 243

Scanned with OKEN Scanner

Redactor : PETRE MOCANU
Tehnoredactor : SONIA BÂRZEANU

Bun de tipar 6.II.1981. Format 16/70 × 100. Coli de tipar 15,75.

C.Z. pentru biblioteci mari: {*517:532.51* / *532.51:517*}

C.Z. pentru biblioteci mici: 51:532

C. 767 — I. P. INFORMAȚIA
str. Brezoianu nr. 23—25, București

Scanned with OKEN Scanner